Université Aix–Marseille 2019–2020

Licence – Mathématiques
Algèbre 2

Cours à distance – Semaine 4 – Polynômes : Généralités – Corrigé TD1

Exercice 1. *Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré au plus 3 :*

1. *vérifiant $P(1) = P(2) = 0$;*

   Soit P un polynôme solution du problème. Notons $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ ses coefficients. On a alors

$$\left\{\begin{array}{c} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_1 + 3a_2 + 7a_3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} a_0 = -a_1 - a_2 - a_3 \\ a_1 = -3a_2 - 7a_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} a_0 = 2a_2 + 6a_3 \\ a_1 = -3a_2 - 7a_3 \end{array}\right. .$$

   On a donc

$$\begin{aligned} P &= (2a_2 + 6a_3) - (3a_2 + 7a_3)X + a_2X^2 + a_3X^3 \\ &= a_2(2 - 3X + X^2) + a_3(6 - 7X + X^3) \\ &= a_2(X-1)(X-2) + a_3(X-1)(X^2 + X - 6) \\ &= a_2(X-1)(X-2) + a_3(X-1)(X-2)(X+3) \\ &= (X-1)(X-2)\big(a_2 + a_3(X+3)\big). \end{aligned}$$

   Or tout polynôme de degré au plus 1 peut s'écrire sous la forme $a_2+a_3(X+3)$. On en déduit donc que P s'écrit sous la forme $(X-1)(X-2)Q(X)$ avec $Q \in \mathbb{K}[X]$ de degré au plus 1. Réciproquement, il est clair que tout polynôme de cette forme est de degré au plus 3 et s'annule en 1 et en 2. L'ensemble des solutions est donc

$$\Big\{(X-1)(X-2)(aX+b) \mid a, b \in \mathbb{R}\Big\}.$$

2. *vérifiant $P(1) = P(2) = 1$.*

   Soit P un polynôme solution du problème. Alors $P-1$ est solution du problème précédent et il existe donc $Q \in \mathbb{R}[X]$ de degré au plus 1 tel que $P-1 = (X-1)(X-2)Q$; on a alors $P = (X-1)(X-2)Q+1$. Réciproquement, il est clair que tout polynôme de cette forme est de degré au plus 3 et vaut un en 1 et en 2. L'ensemble des solutions est donc

$$\Big\{(X-1)(X-2)(aX+b) + 1 \mid a, b \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Exercice 2. *Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$.*

On peut remarquer que le polynôme nul est solution. Considérons maintenant P une solution de degré $n \geq 0$. On a alors

$$n + 2 = \deg\big((X^2+1)P(X)\big) = \deg\big(P(X^2)\big) = \deg\big(a_0 + a_1X^2 + \cdots + a_nX^{2n}\big) = 2n.$$

On en déduit que $n = 2$ et donc P s'écrit sous la forme $a_0 + a_1X + a_2X^2$ avec $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. L'équation devient alors

$$a_0 + a_1X^2 + a_2X^4 = (X^2+1)(a_0 + a_1X + a_2X^2) = a_0 + a_1X + (a_0 + a_2)X^2 + a_1X^3 + a_2X^4.$$

On en déduit que $a_1 = 0$ et $a_0 + a_2 = a_1 = 0$, c'est-à-dire $a_0 = -a_2$. Le polynôme P est donc de la forme $a_2(X^2-1)$. Réciproquement, tout polynôme de la forme $a(X^2-1)$ avec $a \in \mathbb{R}$ vérifie bien

$$a(X^2-1)(X^2+1) = a(X^4-1) = a\big((X^2)^2 - 1\big).$$

L'ensemble des solutions est donc
$$\Big\{a(X^2-1) \mid a \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Exercice 3. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier. Montrer que toute famille de polynômes $(P_0, P_1, \cdots, P_n)$ dans $\mathbb{R}[X]$ telle que $\deg(P_k) = k$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ forme une base du $\mathbb{R}$–espace vectoriel $\mathbb{R}[X]_n$.*

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, notons $a_{k,0}, \ldots, a_{k,k} \in \mathbb{R}$ les coefficients de P_k. On a donc $P_k =: \sum_{i=0}^{k} a_{k,i}X^i$ at $a_{k,k} \neq 0$ puisque $\deg(P_k) = k$.

Sachant que $(1, X, \ldots, X^n)$ est une base de $\mathbb{R}[X]_n$, une première méthode consiste à observer que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, P_k correspond dans cette base au vecteur $(a_{k,0}, a_{k,1}, \ldots, a_{k,k}, 0, \ldots, 0)$ et qu'ainsi, la matrice dont les colonnes correspondent à tous ces vecteurs est une matrice triangulaire supérieure dont le déterminant vaut $\prod_{k=0}^{n} a_{k,k} \neq 0$. Ces vecteurs forment donc une base de $\mathbb{R}^n$, et $(P_0, P_1, \cdots, P_n)$ une base de $\mathbb{R}[X]_n$.

Autrement, on peut commencer par observer que $(P_0, P_1, \cdots, P_n)$ est une famille de $n+1$ vecteurs dans $\mathbb{R}[X]_n$ qui est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n+1$. Il suffit donc de montrer que cette famille est libre. On procède pour cela par récurrence sur n. Le résultat est clair pour $n = 0$ car on a alors un unique vecteur non nul car de degré 0. Considérons le résultat vrai pour $n-1 \geq 0$ et considérons $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k = 0$. En rassemblant les termes de même degré, on a

$$0 = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{k} \alpha_k a_{k,i} X^i \right) = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{k=i}^{n} \alpha_k a_{k,i} \right) X^i.$$

En particulier, le terme de degré n à droite vaut $\alpha_n a_{n,n} X^n$ tandis qu'il est nul à gauche. On a donc $\alpha_n a_{n,n} = 0$ et, comme $a_{n,n} \neq 0$, $\alpha_n = 0$. On en déduit que $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k P_k = 0$. Or, par HR, la famille $(P_0, \ldots, P_{n-1})$ est libre, tous les coefficients $\alpha_, \ldots, \alpha_{n-1}$ sont donc nuls. Au final, tous les $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont nuls, et la famille $(P_1, \ldots, P_n)$ est donc libre de cardinal maximale, c'est donc bien une base de $\mathbb{R}[X]_n$.

Exercice 4. *On considère l'application*

$$\Delta \colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}.$$

1. *Montrer que Δ est une application linéaires (entre espaces vectoriels).*

   Soit $P_1 := \sum_{k=0}^{n_1} a_k X^k, P_2 := \sum_{k=0}^{n_2} b_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. En notant $n = \max(n_1, n_2)$ et en complétant avec des coefficients nuls, on a alors

   $$P_1 + \lambda P_2 = \sum_{k=0}^{n} (a_k + \lambda b_k) X^k,$$

   et donc

   $$\begin{aligned} \Delta(P_1 + \lambda P_2) &= \sum_{k=0}^{n} (a_k + \lambda b_k)(X+1)^k - \sum_{k=0}^{n} (a_k + \lambda b_k) X^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} (a_k + \lambda b_k)(X+1)^k - (a_k + \lambda b_k) X^k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n} a_k\big((X+1)^k - X^k\big) + \lambda b_k\big((X+1)^k - X^k\big)\\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k\big((X+1)^k - X^k\big) + \lambda \sum_{k=0}^{n} b_k\big((X+1)^k - X^k\big)\\
&= \Delta(P_1) + \lambda\Delta(P_2).
\end{aligned}$$

L'application Δ est donc bien linéaire.

2. (a) *Montrer que, pour tout polynôme* $P \in \mathbb{R}[X]$ *de degré non nul, on a* $\deg\big(\Delta(P)\big) = \deg(P) - 1$.

   Considérons $P := \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ avec $n \geq 1$ et $a_n \neq 0$. Alors

$$\begin{aligned}
\Delta(P) &= \sum_{k=0}^{n} a_k (X+1)^k - \sum_{k=0}^{n} a_k X^k\\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i\right) - a_k X^k\\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i\right).
\end{aligned}$$

   Dans cette dernière somme, le terme de plus haut degré est $\binom{n}{n-1} a_n X^{n-1} = n a_n X^{n-1}$. On en déduit que $\deg\big(\Delta(P)\big) = n - 1 = \deg(P) - 1$.

   (b) *En déduire le noyau de* Δ.

   D'après la question précédente, seuls les polynômes de degré au plus 0, c'est-à-dire les polynôemes constants, peuvent être dans le noyau de Δ. Mais réciproquement, il est clair que tous les polynômes constants annulent Δ. On a donc $\mathrm{Ker}(\Delta) = \mathbb{R}[X]_1$.

   (c) *Montrer que, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Ker}(\Delta^n) = \mathbb{R}[X]_{n-1}$, *où* $\Delta^n := \underbrace{\Delta \circ \cdots \circ \Delta}_{n\ fois}$.

   Montrons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. Le cas initial $n = 1$ a été montré dans la question précédente. Considérons maintenant le résultat vrai au rang $n - 1 \geq 1$. Soit $P \in \mathrm{Ker}(\Delta^n)$. Puisque $\Delta^n(P) = \Delta^{n-1}\big(\Delta(P)\big)$, on a alors $\Delta(P) \in \mathrm{Ker}(\Delta^{n-1})$ et donc, par HR, $\Delta(P) \in \mathbb{R}[X]_{n-2}$. Or d'après la question (a), le degré de P vaut alors au plus $n-2+1 = n-1$ et on a donc $P \in \mathbb{R}[X]_{n-1}$. Réciproquement, si $P \in \mathbb{R}[X]_{n-1}$, alors d'après les questions (a) et (b), on a $\Delta(P) \in \mathbb{R}[X]_{n-2}$ et donc, par HR, $\Delta(P) \in \mathrm{Ker}(\Delta^{n-1})$. On en déduit que $P \in \mathrm{Ker}(\Delta^n)$ et donc que $\mathrm{Ker}(\Delta^n) = \mathbb{R}[X]_{n-1}$.

3. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on pose* $T_n := \frac{X(X-1)(X-2)\cdots(X-n+1)}{n!}$, *ainsi que* $T_0 = 1$.

   (a) *Montrer que la famille* $\big(T_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une base de* $\mathbb{R}[X]$ *dans le sens ou toute sous-famille finie est libre, et que tout élément de* $\mathbb{R}[X]$ *s'écrit comme combinaison linéaire d'un nombre fini d'éléments de cette famille.*

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\deg(T_n) = n$. D'après l'exercice 3, la famille $(T_0, T_1, \ldots, T_n)$ est donc une base de $\mathbb{R}[X]_n$. En particulier, tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ s'écrit comme combinaison linéaire de $T_0, \ldots, T_{\deg(P)}$; et toute sous-famille finie $(T_{i_1}, \ldots, T_{i_r})$ est donc une sous-famille de la base $(T_0, T_1, \ldots, T_{\max(i_1,\ldots,i_r)})$ de $\mathbb{R}[X]_{\max(i_1,\ldots,i_r)}$, et en tant que telle, elle est libre.

   (b) *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Calculer* $\Delta(T_n)$ *puis* $\Delta^p(T_n)$ *pour tout* $p \in \mathbb{N}^*$.

   On a $\deg(T_0) = 0$ donc, d'après la question 2.(b), $\Delta(T_0) = 0$.

On a $T_1 = X$, donc $\Delta(T_1) = X + 1 - X = 1 = T_0$. Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, on a

$$\begin{aligned}
\Delta(T_n) &= \frac{(X+1)(X+1-1)(X+1-2)\cdots(X+1-n+1)}{n!} - \frac{X(X-1)(X-2)\cdots(X-n+1)}{n!} \\
&= \frac{(X+1)X(X-1)\cdots(X-n)}{n!} - \frac{X(X-1)(X-2)\cdots(X-n+1)}{n!} \\
&= (X+1)\frac{X(X-1)\cdots(X-n)}{n!} - \frac{X(X-1)(X-2)\cdots(X-n)}{n!}(X-n+1) \\
&= \big((X+1)-(X-n+1)\big)\frac{X(X-1)\cdots(X-n)}{n!} \\
&= n\frac{X(X-1)\cdots(X-n)}{n!} \;=\; \frac{X(X-1)\cdots(X-n)}{(n-1)!} \;=\; T_{n-1}.
\end{aligned}$$

Au final, on a $T_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ T_{n-1} & \text{si } n > 0 \end{cases}$.

Par une récurrence immédiate, on en déduit que

$$\Delta^p(T_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } p > n \\ T_{n-p} & \text{si } p \leq n \end{cases}.$$

(c) *Montrer que l'application $c_0 : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$, envoyant tout polynôme sur son coefficient constant, est linéaire.*

Soit $P_1 := \sum_{k=0}^{n_1} a_k X^k, P_2 := \sum_{k=0}^{n_2} b_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. En notant $n = \max(n_1, n_2)$ et en complétant avec des coefficients nuls, on a alors

$$P_1 + \lambda P_2 = \sum_{k=0}^{n} (a_k + \lambda b_k) X^k,$$

et donc

$$c_0(P_1 + \lambda P_2) = a_0 + \lambda b_0 = c_0(P_1) + \lambda c_0(P_2).$$

L'application c_0 est donc bien linéaire.

(d) *Montrer que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, le coefficient de T_n dans la décomposition de P dans la base $\big(T_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ vaut $c_0\big(\Delta^n(P)\big)$ où $c_0 : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ est l'application qui envoie tout polynôme sur son coefficient constant, et où par convention $\Delta^0 := \mathrm{Id}_{\mathbb{R}[X]}$. Autrement dit, montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]_n$, on a*

$$P = \sum_{k=0}^{n} c_0\big(\Delta^k(P)\big) T_k.$$

Le résultat est clairement vrai pour le polynôme nul. Montrons maintenant le résultat pour tout $P \in \mathbb{R}[X]^*$ par récurrence sur $n := \deg(P) \in \mathbb{N}$.

C'est vrai pour $n = 0$. En effet, P est alors constant égale à son coefficient constant, et on a bien $P = c_0(P) = c_0\big(\Delta^0(P)\big).T_0$.

Supposons maintenant le résultat vrai pour tout polynôme de degré strictement inférieur à $n \in \mathbb{N}^*$ et considérons $P =: \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]_n$. Pour répondre à la question (a), on a montré que $(T_0, \ldots, T_n)$ était une base de $\mathbb{R}[X]_n$, il existe donc $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que $P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k T_k$. Par linéarité de Δ et d'après la question (b), on a alors

$$\Delta^n(P) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \Delta^n(T_k) = \alpha_n T_0 = \alpha_n.$$

En particulier, $\Delta^n(P)$ est un polynôme constant [1]. On a donc $\alpha_n = \Delta^n(P) = c_0\big(\Delta^n(P)\big)$. Posons alors $\widetilde{P} := P - c_0\big(\Delta^n(P)\big)T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k T_k$ qui est de degré strictement inférieur à n et qui, par HR, vérifie donc

$$\widetilde{P} = \sum_{k=0}^{n-1} c_0\big(\Delta^k(\widetilde{P})\big)T_k.$$

Or par linéarité, on a pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$

$$\begin{array}{rcl} c_0\big(\Delta^k(\widetilde{P})\big) & = & c_0\Big(\Delta^k\Big(P - c_0\big(\Delta^n(P)\big)T_n\Big)\Big) \\ & = & c_0\big(\Delta^k(P)\big) - c_0\big(\Delta^n(P)\big).c_0\big(\Delta^k(T_n)\big) \\ & = & c_0\big(\Delta^k(P)\big) - c_0\big(\Delta^n(P)\big).c_0(T_{n-k}) \end{array}$$

d'après la question (b). Or, puisque $n-k > 0$, T_{n-k} se factorise par X et son terme constant est nul ; on a donc $c_0\big(\Delta^k(\widetilde{P})\big) = c_0\big(\Delta^k(P)\big)$. On en déduit que

$$P - c_0\big(\Delta^n(P)\big)T_n = \widetilde{P} = \sum_{k=0}^{n-1} c_0\big(\Delta^k(P)\big)T_k,$$

et donc que

$$P = \sum_{k=0}^{n} c_0\big(\Delta^k(P)\big)T_k.$$

4. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n.*
   (a) *Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$\Delta^k(P) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i}\binom{k}{i}P(X+i) \in \mathrm{Vect}\big(P(X), P(X+1), \ldots, P(X+n)\big).$$

Travaillons par récurrence sur $k \in [\![1, n]\!]$. La formule est vraie pour $k = 1$. Supposons le résultat vrai au rang $k-1 \in \mathbb{N}^*$. On a alors

$$\begin{array}{rcl} \Delta^k(P) & = & \Delta\big(\Delta^{k-1}(P)\big) \\ & = & \Delta\left(\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-1-i}\binom{k-1}{i}P(X+i)\right) \\ & = & \left(\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-1-i}\binom{k-1}{i}P(X+i+1)\right) - \left(\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-1-i}\binom{k-1}{i}P(X+i)\right) \\ & = & \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k-1}{i-1}P(X+i)\right) - \left(\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-1-i}\binom{k-1}{i}P(X+i)\right) \\ & = & \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{k-i}\binom{k-1}{i-1}P(X+i)\right) - \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{k-1-i}\binom{k-1}{i}P(X+i)\right) \\ & & \quad +(-1)^{k-k}\displaystyle\binom{k-1}{k-1}P(X+k) - (-1)^{k-1}\binom{k-1}{0}P(X+0) \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{k-i}\left(\binom{k-1}{i-1} + \binom{k-1}{i}\right)P(X+i) \\ & & \quad +P(X+k) + (-1)^k P(X). \end{array}$$

[1]. on le savait par application itérée de la question 2.(a)

Mais d'après les formules sur les combinaisons [2], on a $\binom{k-1}{i-1} + \binom{k-1}{i} = \binom{k}{i}$ pour tout $i \in [\![1, k-1]\!]$. On en déduit que

$$\Delta^k(P) = \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} P(X+i) + P(X+k) + (-1)^k P(X) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} P(X+i).$$

Cela montre, en particulier, directement que $\Delta^k(P) \in \mathrm{Vect}\big(P(X), P(X+1), \ldots, P(X+n)\big)$ lorsque $k \leq n$. Et d'après la question 2.(c), on a $\Delta^k(P) = 0 \in \mathrm{Vect}\big(P(X), P(X+1), \ldots, P(X+n)\big)$ lorsque $k > n = \deg(P)$.

(b) *Montrer que* $\big(P(X), P(X+1), \ldots, P(X+n)\big)$ *est une base de* $\mathbb{R}[X]_n$.

D'après la question précédente, $\mathrm{Vect}\big(P(X), P(X+1), \ldots, P(X+n)\big)$ contient la famille

$$\big(\Delta^n(P), \Delta^{n-1}(P), \ldots, \Delta(P), P\big).$$

Or d'après la question 2.(a), on a $\deg\big(\Delta^n(P)\big) = 0$, $\deg\big(\Delta^{n-1}(P)\big) = 1$,..., $\deg\big(\Delta(P)\big) = n-1$ et $\deg(P) = n$. D'après l'exercice 3, la famille $\big(\Delta^n(P), \Delta^{n-1}(P), \ldots, \Delta(P), P\big)$ est donc une base de $\mathbb{R}[X]_n$. On en déduit que $\big(P(X), P(X+1), \ldots, P(X+n)\big)$ est génératrice de $\mathbb{R}[X]_n$ et, par minimalité de son cardinal, c'en est donc une base.

2. c'est néanmoins un bonne exercice que d'essayer de les redémontrer