

Licence – Mathématiques
Algèbre 2

COURS À DISTANCE – SEMAINE 4 – TD2 – POLYNÔMES : DIVISION EUCLIDIENNE

Exercice 1. Effectuer les divisions euclidiennes :

1. de $2X^3 + X^2 - 2$ par $X + 2$;
2. de $X^5 - X^4 + 6X^2 - 3X - 1$ par $X^2 - 2X + 1$;
3. de $X^5 - X^4 + 6X^2 - 3X - 1$ par $2X^4 - X^3 + X$.

Exercice 2. Déterminer les valeurs $a, b \in \mathbb{C}^2$ telles que $X^4 + X^3 + aX^2 + bX + 2$ soit divisible par $X^2 + 2$.

Exercice 3. Soit $\mathbb{K}$ un corps.

1. (a) Soit $a \in \mathbb{K}$. Exprimer le reste de la division euclidienne de $P \in \mathbb{K}[X]$ par $X - a$ en fonction de $P(a)$.
(b) Soit $a \neq b \in \mathbb{K}$. Exprimer le reste de la division euclidienne de $P \in \mathbb{K}[X]$ par $(X - a)(X - b)$ en fonction de $P(a)$ et $P(b)$.
(c) Soit $a \in \mathbb{K}$. Exprimer le reste de la division euclidienne de $P \in \mathbb{K}[X]$ par $(X - a)^2$ en fonction de $P(a)$ et $P'(a)$.
2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le reste des divisions euclidiennes de $(X - 3)^{2n} + (X - 2)^n - 2$ par $X - 2$, $X - 3$ et $(X - 2)(X - 3)$.
(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le reste des divisions euclidiennes de $(X + 1)^n + X^n - 1$ et $X^{2n} - X^n + 1$ par $X^2 - 3X + 2$ et $X^2 + X + 1$.
(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\cos((n - 1)\theta)X^{n+1} - \cos(n\theta)X^n - \cos(\theta)X + 1$ est divisible par $X^2 - 2\cos(\theta)X + 1$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.