

Licence – Mathématiques
Algèbre 2

COURS À DISTANCE – SEMAINE 4 – POLYNÔMES : DIVISION EUCLIDIENNE – TD2 CORRIGÉ

Exercice 1. *Effectuer les divisions euclidiennes :*

1. de $2X^3 + X^2 - 2$ par $X + 2$;

En effectuant la division euclidienne version “maternelle”, on obtient successivement :

- $2X^3 + X^2 - 2 = 2X^2(X + 2) + -3X^2 - 2$;
- $2X^3 + X^2 - 2 = (2X^2 - 3X)(X + 2) + 6X - 2$;
- $2X^3 + X^2 - 2 = (2X^2 - 3X + 6)(X + 2) - 14$.

Les quotient et reste de la division euclidienne sont donc respectivement $2X^2 - 3X + 6$ et 14.

2. de $X^5 - X^4 + 6X^2 - 3X - 1$ par $X^2 - 2X + 1$;

En effectuant la division euclidienne version “maternelle”, on obtient successivement :

- $X^5 - X^4 + 6X^2 - 3X - 1 = X^3(X^2 - 2X + 1) + X^4 - X^3 + 6X^2 - 3X - 1$;
- $X^5 - X^4 + 6X^2 - 3X - 1 = (X^3 + X^2)(X^2 - 2X + 1) + X^3 + 5X^2 - 3X - 1$;
- $X^5 - X^4 + 6X^2 - 3X - 1 = (X^3 + X^2 + X)(X^2 - 2X + 1) + 7X^2 - 4X - 1$;
- $X^5 - X^4 + 6X^2 - 3X - 1 = (X^3 + X^2 + X + 7)(X^2 - 2X + 1) + 10X - 8$.

Les quotient et reste de la division euclidienne sont donc respectivement $X^3 - X^4 + 6X^2 - 3X - 1 = (X^3 + X^2 + X)(X^2 - 2X + 1) + 7X^2 - 4X - 1$ et $10X - 8$.

3. de $X^5 - X^4 + 6X^2 - 3X - 1$ par $2X^4 - X^3 + X$.

En effectuant la division euclidienne version “maternelle”, on obtient successivement :

- $X^5 - X^4 + 6X^2 - 3X - 1 = \frac{1}{2}X(2X^4 - X^3 + X) - \frac{1}{2}X^4 + \frac{11}{2}X^2 - 3X - 1$;
- $X^5 - X^4 + 6X^2 - 3X - 1 = (\frac{1}{2}X - \frac{1}{4})(2X^4 - X^3 + X) - \frac{1}{4}X^3 + \frac{11}{2}X^2 - \frac{11}{4}X - 1$.

Les quotient et reste de la division euclidienne sont donc respectivement $\frac{1}{4}(2X - 1)$ et $\frac{1}{4}(-X^3 + 22X^2 - 11X - 4)$.

Exercice 2. *Déterminer les valeurs $a, b \in \mathbb{C}^2$ telles que $X^4 + X^3 + aX^2 + bX + 2$ soit divisible par $X^2 + 2$.*

En effectuant la division euclidienne version “maternelle”, on obtient successivement :

- $X^4 + X^3 + aX^2 + bX + 2 = X^2(X^2 + 2) + X^3 + (a - 2)X^2 + bX + 2$;
- $X^4 + X^3 + aX^2 + bX + 2 = (X^2 + X)(X^2 + 2) + (a - 2)X^2 + (b - 2)X + 2$;
- $X^4 + X^3 + aX^2 + bX + 2 = (X^2 + X + a - 2)(X^2 + 2) + (b - 2)X + 6 - 2a$.

On obtient donc que le reste de la division euclidienne vaut $(b - 2)X + 6 - 2a$. Pour que celui-ci soit nul, et donc que $X^2 + 2$ divise $X^4 + X^3 + aX^2 + bX + 2$, il faut et suffit donc que $a = 3$ et $b = 2$.

Exercice 3. *Soit $\mathbb{K}$ un corps.*

1. (a) *Soit $a \in \mathbb{K}$. Exprimer le reste de la division euclidienne de $P \in \mathbb{K}[X]$ par $X - a$ en fonction de $P(a)$.*

Par division euclidienne, on a $P(X) = Q(X)(X - a) + R(X)$ avec $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\deg(R) < \deg(X - a) = 1$. Le polynôme R est donc de degré au plus 0, donc un polynôme constant entièrement déterminé par son coefficient constant $r \in \mathbb{K}$. On a donc $P(X) = Q(X)(X - a) + r$. En évaluant cela en a , on obtient $P(a) = Q(a)(a - a) + r = r$. On en déduit que le reste de la division euclidienne de P par $X - a$, c’est le polynôme constant égal à $P(a)$.

- (b) Soit $a \neq b \in \mathbb{K}$. Exprimer le reste de la division euclidienne de $P \in \mathbb{K}[X]$ par $(X-a)(X-b)$ en fonction de $P(a)$ et $P(b)$.

Par division euclidienne, on a $P(X) = Q(X)(X-a)(X-b) + R(X)$ avec $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\deg(R) < \deg((X-a)(X-b)) = 2$. Le polynôme R est donc de la forme $\alpha X + \beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. On a donc $P(X) = Q(X)(X-a)(X-b) + \alpha X + \beta$. En évaluant cela en a et en b , on obtient

$$\begin{aligned} \begin{cases} P(a) = Q(a)(a-a)(a-b) + \alpha a + \beta = \alpha a + \beta \\ P(b) = Q(b)(b-a)(b-b) + \alpha b + \beta = \alpha b + \beta \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} P(a) = \alpha a + \beta \\ P(b) - P(a) = \alpha(b-a) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = P(a) - \alpha a \\ \alpha = \frac{P(b) - P(a)}{b-a} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = P(a) - \frac{P(b) - P(a)}{b-a} a = \frac{bP(a) - aP(b)}{b-a} \\ \alpha = \frac{P(b) - P(a)}{b-a} \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit que le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$ lorsque $a \neq b$ vaut $\frac{P(b)-P(a)}{b-a}X + \frac{bP(a)-aP(b)}{b-a}$.

2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le reste des divisions euclidiennes de $(X-3)^{2n} + (X-2)^n - 2$ par $X-2$, $X-3$ et $(X-2)(X-3)$.

On note $P := (X-3)^{2n} + (X-2)^n - 2$, $a = 2$ et $b = 3$. On a alors $P(a) = (2-3)^{2n} + (2-2)^n - 2 = (-1)^{2n} - 2 = -1$, $P(b) = (3-3)^{2n} + (3-2)^n - 2 = 1^n - 2 = -1$ et $\frac{P(b)-P(a)}{b-a}X + \frac{bP(a)-aP(b)}{b-a} = \frac{-1+1}{3-2}X + \frac{3(-1)-2(-1)}{3-2} = -1$. D'après les questions 1.(a) et 1.(b), les restes des divisions euclidiennes de $(X-3)^{2n} + (X-2)^n - 2$ par $X-2$, $X-3$ et $(X-2)(X-3)$ sont donc tous égaux au polynôme constant égal à -1 .

- (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le reste des divisions euclidiennes de $(X+1)^n + X^n - 1$ et $X^{2n} - X^n + 1$ par $X^2 - 3X + 2$.

On pose $P_1 := (X+1)^n + X^n - 1$ et $P_2 := X^{2n} - X^n + 1$.

En remarquant¹ que $X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$, on déduit de la question 1.(b) que les restes des divisions euclidiennes de P_1 et P_2 par $X^2 - 3X + 2$ valent respectivement

- $(P_1(2) - P_1(1))X + 2P_1(1) - P_1(2) = (3^n + 2^n - 1 - 2^n - 1^n + 1)X + 2(2^n + 1 - 1) - 3^n - 2^n + 1 = (3^n - 1)X + 2^n - 3^n + 1 = 2^n + (3^n - 1)(X - 1)$;
- $(P_2(2) - P_2(1))X + 2P_2(1) - P_2(2) = (4^n - 2^n + 1 - 1^{2n} + 1^n - 1)X + 2(1^{2n} - 1^n + 1) - 4^n + 2^n - 1 = (4^n - 2^n)X - 4^n + 2^n + 1 = 1 + 2^n(2^n - 1)(X - 1)$.

- (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\cos((n-1)\theta)X^{n+1} - \cos(n\theta)X^n - \cos(\theta)X + 1$ est divisible par $X^2 - 2\cos(\theta)X + 1$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

On commence par remarquer que

$$\begin{aligned} X^2 - 2\cos(\theta)X + 1 &= (X - \cos(\theta))^2 + 1 - \cos^2(\theta) \\ &= (X - \cos(\theta))^2 + \sin^2(\theta) \\ &= (X - \cos(\theta) + i\sin(\theta))(X - \cos(\theta) - i\sin(\theta)) \\ &= (X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta}). \end{aligned}$$

En posant $P(X) := \cos((n-1)\theta)X^{n+1} - \cos(n\theta)X^n - \cos(\theta)X + 1$ et d'après la question 1.(b), il ne suffit donc plus qu'à montrer que $P(e^{i\theta}) - P(e^{-i\theta})$ et $e^{i\theta}P(e^{-i\theta}) - e^{-i\theta}P(e^{i\theta})$ s'annulent, c'est-à-dire que $P(e^{i\theta}) = P(e^{-i\theta})$ et $e^{i\theta}P(e^{-i\theta}) = e^{-i\theta}P(e^{i\theta})$. Or

$$\begin{aligned} P(e^{i\theta}) &= \cos((n-1)\theta)e^{i(n+1)\theta} - \cos(n\theta)e^{in\theta} - \cos(\theta)e^{i\theta} + 1 \\ &= \frac{e^{i(n-1)\theta} + e^{-i(n-1)\theta}}{2}e^{i(n+1)\theta} - \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2}e^{in\theta} - \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}e^{i\theta} + 1 \\ &= \frac{(e^{i(n-1)\theta} + e^{-i(n-1)\theta})e^{i(n+1)\theta} - (e^{in\theta} + e^{-in\theta})e^{in\theta} - (e^{i\theta} + e^{-i\theta})e^{i\theta} + 2}{2} \end{aligned}$$

1. en ayant éventuellement recherché les racines de ce polynôme

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{2in\theta} + e^{2i\theta} - e^{2in\theta} - 1 - e^{2i\theta} - 1 + 2}{2} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

et, puisque P est à coefficient réels, $P(e^{-i\theta}) = P(\overline{e^{i\theta}}) = \overline{P(e^{i\theta})} = \overline{0} = 0$. On en conclut que $X^2 - 2\cos(\theta)X + 1$ divise bien $\cos((n-1)\theta)X^{n+1} - \cos(n\theta)X^n - \cos(\theta)X + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$.