Université Aix–Marseille	2019–2020

Licence – Mathématiques
Algèbre 2

COURS À DISTANCE – SEMAINE 5 – TD1 – POLYNÔMES : PGCD ET PPCM

Exercice 1. Déterminer le pgcd de $P = X^3 - 3X^2 + 3X - 1$ et $Q = X^3 - 1$.

Exercice 2. Déterminer le pgcd et le ppcm de P et Q, ainsi qu'une relation de Bézout, pour :

1. $P = X^4 + X^3 - 3X^2 - 4X - 1$ et $Q = X^3 + X^2 - X - 1$,
2. $P = X^4 + X^3 - 2X + 1$ et $Q = X^2 + X + 1$.

Exercice 3.

1. Trouver le pgcd de $X^{24} - 1$ et $X^{15} - 1$; de $X^{42} - 1$ et $X^{18} - 1$.
2. Soient m et n deux entiers strictement positifs tels que m divise n. Montrer que $X^m - 1$ divise $X^n - 1$.
3. Soient a et b deux entiers strictement positifs. On note r le reste de la division euclidienne de a par b. Déterminer le reste de la division euclidienne de $X^a - 1$ par $X^b - 1$.
4. Déterminer le pgcd de $X^a - 1$ et $X^b - 1$.

Exercice 4. On définit par récurrence les polynômes de Tchebychev par

$$\begin{cases} T_0 = 1 \\ T_1 = X \\ T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}.$$

1. Calculer T_2, T_3 et T_4.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré et le coefficient dominant de T_n.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n et T_{n+1} sont premiers entre eux.
4. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, calculer $T_n\big(\cos(\theta)\big)$.

Exercice 5. Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. On note $p = \deg(P)$ et $q = \deg(Q)$. On suppose $p, q > 0$. On considère l'application

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{K}[X]_{q-1} \times \mathbb{K}[X]_{p-1} & \to & \mathbb{K}[X]_{p+q-1} \\ (U, V) & \mapsto & UP + VQ \end{cases}.$$

À quelle condition sur P et Q l'application ϕ est-elle bijective ?