

Licence – Mathématiques
Algèbre 2

COURS À DISTANCE – SEMAINE 5 – TD2 – POLYNÔMES IRRÉDUCTIBLES

Exercice 1. Donner la décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$:

1. de $X^3 - 3X - 2$;
2. de $X^4 + X^2 + 1$;
3. de $X^6 - 3X^5 + 2X^4 + X^2 - 3X + 2$;
4. de $2X^4 - X^3 - 9X^2 + 13X - 5$;
5. de $2X^4 - 10X^3 + 6X^2 + 18X$.

Exercice 2.

1. Soit $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in \mathbb{Q}[X]$ avec $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$. Soient $p, q \in \mathbb{Z}^*$ des entiers premiers entre eux tels que $P\left(\frac{p}{q}\right) = 0$. Montrer que p divise a_0 et que q divise a_n .
2. Montrer que, pour tout $a \neq b \in \mathbb{Z}$ tels que $a + b \neq -2$, le polynôme $P = X^3 + aX^2 + bX + 1$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Exercice 3. Dans cet exercice, quand bien même $\mathbb{Z}$ n'est pas un corps, on considérera $\mathbb{Z}[X] \subset \mathbb{Q}[X]$, l'anneau des polynômes à coefficients entiers.

Pour tout polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]^*$, on appelle *contenu de P* , noté $c(P)$, le pgcd des coefficients de P . On dit que P est *primitif* si $c(P) = 1$.

1. Calculer le contenu des polynômes suivants et dire s'ils sont primitifs : $P = 6X^3 - 15X^2 + 9$, $Q = 5X^2 + 3X - 15$, $R = 4X^3 + 8X - 14$.
2. (a) Pour tout entier premier p , on définit l'application

$$\varphi_p: \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[X] & \longrightarrow & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X] \\ \sum_{i=0}^n a_i X^i & \longmapsto & \sum_{i=0}^n \bar{a}_i X^i \end{array}.$$

Montrer que φ_p est un morphisme d'anneaux. Déterminer son noyau.

- (b) Montrer qu'un produit de polynômes primitifs est primitif.
- (c) En déduire que, pour tous polynômes $P, Q \in \mathbb{Z}[X]^*$, on a $c(P.Q) = c(P).c(Q)$.
3. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme non irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. Montrer que P est le produit de deux polynômes de $\mathbb{Z}[X]$ de degré strictement positif.
4. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ de degré strictement positif. Montrer que P est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ si et seulement si $c(P) = 1$ et P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
5. (Critère d'Eisenstein) Soit $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in \mathbb{Z}[X]$ tel qu'il existe un nombre premier p vérifiant les propriétés suivantes :
 - p ne divise pas a_n ;
 - p divise a_i pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$;
 - p^2 ne divise pas a_0 .

Montrer que P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. (On pourra utiliser l'application φ_p .)

6. (a) Le polynôme $5X^3 + 45X^2 - 15X + 15$ est-il irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$?
- (b) Soit p un entier premier et $n \in \mathbb{N}^*$. Le polynôme $X^n - p$ est-il irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$?
- (c) Le polynôme $P = X^2 + X + 2$ est-il irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$? (On pourra s'intéresser au polynôme $P(X+3)$.)
- (d) Reprendre les trois questions précédentes dans $\mathbb{Z}[X]$.