Université Aix–Marseille 2019–2020

Licence – Mathématiques
Algèbre 2

Cours à distance – Semaine 6 – TD1 – Polynômes : racines

Exercice 1.

1. On considère l'équation $(X-16)P(2X) = 16(X-1)P(X)$ sur $\mathbb{R}[X]$.
   (a) A l'aide du coefficient dominant, montrer qu'une solution non nulle est nécessairement de degré 4.
   (b) Montrer que tout polynôme solution admet 2, 4, 8 et 16 comme racines.
   (c) En déduire toutes les solutions de l'équation.
2. On considère l'équation $P(X+1) = P(X-1)$ sur $\mathbb{C}[X]$.
   (a) Montrer que si un polynôme solution admet $\alpha \in \mathbb{C}$ comme racine, alors $\alpha + 2$ est également racine.
   (b) En déduire toutes les solutions de l'équation.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier et $\alpha \neq \beta \in \mathbb{C}$. Montrer que la famille $\left((X-\alpha)^k(X-\beta)^{n-k}\right)_{k\in[\![0,n]\!]}$ forme une base du $\mathbb{C}$–espace vectoriel $\mathbb{C}[X]_n$.

Exercice 3. Le but de cet exercice est de donner une formule algébrique pour $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

1. Donner la décomposition en facteurs irréductibles de $X^5 - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Par identification des coefficients après développement du produit des facteurs de degré 2 dans la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$, en déduire que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est racine de $4X^2 + 2X - 1$.
3. En déduire que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ et que $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$.
4. En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ et que $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$.

Exercice 4.

On considère le polynôme $P := X^3 - 3X + 1 \in \mathbb{R}[X]$.

1. A l'aide du théorème des valeurs intermédiaires, montrer que P admet au moins une racine réelle, que l'on notera α_0 dans la suite.
2. On suppose dans cette question que α_0 est la seule racine réelle de P.
   (a) A l'aide de la décomposition de P en facteurs irréductibles, montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x)$ est du même signe que $x - \alpha_0$.
   (b) En déduire que α_0 est simultanément inférieur à 0 et supérieur à 1.
3. Montrer que P est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.