Université Aix–Marseille 2019–2020

Licence – Mathématiques
Algèbre 2

COURS À DISTANCE – SEMAINE 6 – POLYNÔMES – CORRIGÉ TD1

Exercice 1.

1. *On considère l'équation* $(X-16)P(2X) = 16(X-1)P(X)$ *sur* $\mathbb{R}[X]$.
   (a) *A l'aide du coefficient dominant, montrer qu'une solution non nulle est nécessairement de degré* 4.

   On note $n \in \mathbb{N}$ et $a_n \in \mathbb{R}^*$ le degré et le coefficient dominant d'une solution non nulle. En développant, on obtient que $16(X-1)P(X)$ est de degré $n+1$ avec un coefficient dominant égal à $16a_n$, tandis que $(X-16)P(2X)$ est de degré $n+1$ avec un coefficient dominant égal à $2^n a_n$. Puisque $a_n \neq 0$, on en déduit que $2^n = 16$ et donc que $n = 4$.

   (b) *Montrer que tout polynôme solution admet* 2, 4, 8 *et* 16 *comme racines.*

   Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ une solution. En évaluant l'équation en $X = 1$, on trouve $-15.P(2) = 16.0.P(1) = 0$, on en déduit $P(2) = 0$ et donc que 2 est racine de P.

   En évaluant cette fois en $X = 2$, on trouve $-14.P(4) = 16.1.P(2) = 0$ et donc 4 est racine de P. De même, on trouve que 8 et 16 sont également racines. On pourra remarquer toutefois que le processus ne peut pas être continué car, en $X = 16$, on trouve $0.P(32) = -16.15.P(16) = 0$, c'est-à-dire $0 = 0$, ce qui n'apporte pas de nouvelle information.

   (c) *En déduire toutes les solutions de l'équation.*

   Commençons par remarquer que le polynôme nul est solution. Par ailleurs, d'après les deux questions précédentes, toute solution non nulle est de degré 4 et admet 2, 4, 8 et 16 comme racine. Il est donc divisible par $(X-2)(X-4)(X-8)(X-16)$ et, pour des raisons de degré, il est de la forme $\alpha(X-2)(X-4)(X-8)(X-16)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

   Au final, les solutions sont exactement les polynômes de la forme $\alpha(X-2)(X-4)(X-8)(X-16)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. *On considère l'équation* $P(X+1) = P(X-1)$ *sur* $\mathbb{C}[X]$.
   (a) *Montrer que si un polynôme solution admet* $\alpha \in \mathbb{C}$ *comme racine, alors* $\alpha + 2$ *est également racine.*

   Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ une solution admettant $\alpha \in \mathbb{C}$ comme racine. En évaluant l'équation en $X = \alpha + 1$, on obtient $P(\alpha+2) = P\big((\alpha+1)+1\big) = P\big((\alpha+1)-1\big) = P(\alpha) = 0$. On en déduit donc que $\alpha + 2$ est racine de P.

   (b) *En déduire toutes les solutions de l'équation.*

   Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ une solution. Supposons par l'absurde que P soit de degré $n \in \mathbb{N}^*$ strictement positif. D'après le théorème de d'Alembert–Gauss il admet alors au moins une racine complexe $\alpha \in \mathbb{C}$. Mais alors, par une récurrence immédiate sur la question précédente, P admettrait également $\alpha + 2k$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, comme racines, alors qu'il ne peut posséder qu'au plus n racines. On en déduit qu'une solution ne peut être que constante. Mais réciproquement, il est clair que tout polynôme constant est solution.

Exercice 2. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *un entier et* $\alpha \neq \beta \in \mathbb{C}$. *Montrer que la famille* $\big((X-\alpha)^k(X-\beta)^{n-k}\big)_{k \in [\![0,n]\!]}$ *forme une base du* $\mathbb{C}$*–espace vectoriel* $\mathbb{C}[X]_n$.

C'est une famille de $n+1$ polynômes dans un espace vectoriel de dimension $n+1$, il suffit donc de montrer que cette famille est libre. Pour cela, on procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Pour $n = 0$, la famille ne contient qu'un unique polynôme non nul, à savoir 1, elle est donc bien libre. Supposons le résultat vrai au rang $n-1$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et considérons donc $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ tels que

$$a_0(X-\beta)^n + a_1(X-\alpha)(X-\beta)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(X-\alpha)^{n-1}(X-\beta) + a_n(X-\alpha)^n = 0.$$

En évaluant en $X = \beta$, on trouve alors

$$0 = a_0(\beta-\beta)^n + a_1(\beta-\alpha)(\beta-\beta)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(\beta-\alpha)^{n-1}(\beta-\beta) + a_n(\beta-\alpha)^n = a_n(\beta-\alpha)^n.$$

Or comme $\alpha \neq \beta$, on a $(\beta-\alpha)^n \neq 0$ et donc $a_n = 0$. On en déduit que

$$\begin{aligned} 0 &= a_0(X-\beta)^n + a_1(X-\alpha)(X-\beta)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(X-\alpha)^{n-1}(X-\beta) \\ &= (X-\beta)\big(a_0(X-\beta)^{n-1} + a_1(X-\alpha)(X-\beta)^{n-2} + \cdots + a_{n-1}(X-\alpha)^{n-1}\big). \end{aligned}$$

Par intégrité de $\mathbb{C}[X]$, on en déduit que

$$a_0(X-\beta)^{n-1} + a_1(X-\alpha)(X-\beta)^{n-2} + \cdots + a_{n-1}(X-\alpha)^{n-1} = 0,$$

et, par HR, que $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} = 0$. Au final, tous les coefficient de la combinaison linéaire sont nécessairement nuls, et la famille est donc libre.

La famille $\big((X-\alpha)^k(X-\beta)^{n-k}\big)_{k\in[\![0,n]\!]}$ forme donc bien une base de $\mathbb{C}[X]_n$.

Exercice 3. *Le but de cet exercice est de donner une formule algébrique pour* $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ *et* $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

1. *Donner la décomposition en facteurs irréductibles de* $X^5 - 1$ *dans* $\mathbb{C}[X]$ *puis dans* $\mathbb{R}[X]$.

   Les racines de $X^5 - 1$ dans $\mathbb{C}$ correspondent aux solutions de l'équation $z^5 = 1$, c'est-à-dire aux racines cinquièmes de l'unité, c'est-à-dire à 1, $e^{\pm\frac{2i\pi}{5}}$ et $e^{\pm\frac{4i\pi}{5}}$. Dans $\mathbb{C}[X]$, $X^5 - 1$ se décompose donc en
   $$X^5 - 1 = (X-1)(X-e^{\frac{2i\pi}{5}})(X-e^{-\frac{2i\pi}{5}})(X-e^{\frac{4i\pi}{5}})(X-e^{-\frac{2i\pi}{5}}).$$

   Pour obtenir la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$, on peut développer le produit des termes correspondants à des racines complexes conjugués (ici, cela donne deuxième facteur avec troisième, et quatrième avec cinquième). On obtient

   $$\begin{aligned} X^5 - 1 &= (X-1)\big(X^2 - (e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{-\frac{2i\pi}{5}})X + e^{\frac{2i\pi}{5}}e^{-\frac{2i\pi}{5}}\big)\big(X^2 - (e^{\frac{4i\pi}{5}} + e^{-\frac{4i\pi}{5}})X + e^{\frac{4i\pi}{5}}e^{-\frac{4i\pi}{5}}\big) \\ &= (X-1)\Big(X^2 - 2\cos\Big(\frac{2\pi}{5}\Big)X + 1\Big)\Big(X^2 - 2\cos\Big(\frac{4\pi}{5}\Big)X + 1\Big). \end{aligned}$$

   Les facteurs de degré 2 sont bien irréductibles car, pour tout $\theta \in]0,\pi[$, $4\cos^2(\theta) - 4 < 0$.

2. *Par identification des coefficients après développement du produit des facteurs de degré 2 dans la décomposition dans* $\mathbb{R}[X]$, *en déduire que* $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ *est racine de* $4X^2 + 2X - 1$.

   D'un coté ona par identité remarquable que $X^5 - 1 = (X-1)(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)$. D'autre part, d'après la question précédente, on a également

$$\begin{aligned} X^5 - 1 &= (X-1)\Big(X^2 - 2\cos\Big(\frac{2\pi}{5}\Big)X + 1\Big)\Big(X^2 - 2\cos\Big(\frac{4\pi}{5}\Big)X + 1\Big) \\ &= (X-1)\bigg(X^4 - 2\Big(\cos\Big(\frac{2\pi}{5}\Big) + \cos\Big(\frac{4\pi}{5}\Big)\Big)X^3 + \Big(2 + 4\cos\Big(\frac{2\pi}{5}\Big)\cos\Big(\frac{4\pi}{5}\Big)\Big)X^2 - 2\Big(\cos\Big(\frac{2\pi}{5}\Big) + \cos\Big(\frac{4\pi}{5}\Big)\Big)X + 1\bigg). \end{aligned}$$

   Par identification des coefficients, on a donc

   $$\begin{cases} -2\Big(\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\Big) = 1 \\ 2 + 4\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 1 \end{cases}$$

dont on déduit successivement $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - \frac{1}{2}$ puis

$$1 = 2 - 4\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \frac{1}{2}\right) = 2 - 4\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right).$$

Au final, on a $4\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1 = 0$, montrant que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est racine de $4X^2 + 2X - 1$.

3. *En déduire que* $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ *et que* $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$.

   D'après les formules de résolutions des équations polynomiales du second degré, $4X^2 + 2X - 1$ admet deux racines, $\frac{-2+2\sqrt{20}}{8} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ et $\frac{-\sqrt{5}-1}{4}$. D'après la question précédente, $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est donc égale à l'une de ces deux valeurs. Or $\frac{2\pi}{5} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \geq 0$, et $\frac{-\sqrt{5}-1}{4} < 0$. On en déduit que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

   Puisque $\frac{2\pi}{5} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a également $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) \geq 0$, et donc

$$\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{6-2\sqrt{5}}{16}} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} = \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}.$$

4. *En déduire que* $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ *et que* $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$.

   Puisque $\frac{\pi}{5}$ est également dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a aussi $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right), \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \geq 0$. Or par formule trigonométrique, on a $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - 1$ et donc

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{5}-1}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}.$$

   Or on peut remarquer que $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2 = \frac{6+2\sqrt{5}}{16} = \frac{3+\sqrt{5}}{8}$. On a donc $\frac{\sqrt{5}+1}{4} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}} = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

   Enfin

$$\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{6+2\sqrt{5}}{16}} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} = \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}.$$

Exercice 4.

On considère le polynôme $P := X^3 - 3X + 1 \in \mathbb{R}[X]$.

1. *A l'aide du théorème des valeurs intermédiaires, montrer que* P *admet au moins une racine réelle, que l'on notera* α_0 *dans la suite.*

   Le polynôme P étant de degré impair, avec un coefficient dominant positif, on a $\lim_{x\to+\infty} f_P(x) = +\infty$, il existe donc $x_1 \in \mathbb{R}$ tel que $f_P(x_1) > 0$. De même, on a $\lim_{x\to-\infty} f_P(x) = -\infty$ et il existe donc $x_2 \in \mathbb{R}$ tel que $f_P(x_2) < 0$. La fonction f_P étant polynomiale, donc continue, le théorème des valeurs intermédiaires affirme alors l'existence d'un réel $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ (entre x_1 et x_2) tel que $f_P(\alpha_0) = 0$, c'est-à-dire tel que α_0 soit racine de P.

2. *On suppose dans cette question que* α_0 *est la seule racine réelle de* P.

   (a) *A l'aide de la décomposition de* P *en facteurs irréductibles, montrer que, pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $P(x)$ *est du même signe que* $x - \alpha_0$.

   Le polynôme P étant de degré 3, sa décomposition en facteurs irréductibles comprend ou bien trois facteurs de degré 1, ou bien un facteur de degré 1 et au autre de degré 2. Dans le premier cas, α_0 étant la seule racine réelle et P étant unitaire, on aurait $P = (X - \alpha_0)^3 = X^3 - 3\alpha_0 X^2 + 3\alpha_0^2 X + \alpha_0^3$, ce qui impliquerait, en comparant les coefficients de degré deux et zéro, $0 = \alpha_0 = 1$. On en déduit, P étant toujours unitaire, que $P = (X - \alpha_0)(X^2 + aX + b)$ avec $X^2 + aX + b \in \mathbb{R}[X]$ sans racine car irréductible. La fonction f_{X^2+aX+b} est donc en particulier de signe constant, et ce signe est positif puisque $\lim_{x\to\pm\infty} f_{X^2+aX+b} = +\infty$. On en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x - \alpha_0)(x^2 + ax + b)$ est du signe de $x - \alpha_0$.

(b) *En déduire que α_0 est simultanément inférieur à 0 et supérieur à 1.*

En appliquant la question précédente en $x = 0$, on obtient $-\alpha_0$ est de même signe que $P(0) = 1$, et donc que $\alpha_0 < 0$. En l'appliquant en $x = 1$, on obtient que $1 - x < 0$ car $P(1) = -1$ et donc que $\alpha_0 > 1$.

3. *Montrer que P est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.*

La question précédente montre que supposer que P n'admet qu'une seule racine réelle mène à $0 > \alpha_0 > 1$, ce qui est absurde. Il admet donc au moins une seconde racine $\alpha_1 \in \mathbb{R}[X]$, mais alors sa décomposition en facteurs irréductibles contient au moins deux facteurs de degré 1. Puisque P est de degré 3, le dernier facteur est lui aussi de degré 1, montrant que P est scindé.