

Licence – Mathématiques
Algèbre 2

COURS À DISTANCE – SEMAINE 6 – TD2 – POLYNÔMES : DÉRIVATION

Exercice 1. Déterminez tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré au plus 3 :

1. vérifiant $P(1) = P'(1) = 1$;
2. vérifiant $P(0) = 0$, $P'(1) = 1$, $P''(2) = 2$ et $P'''(3) = 3$.

Exercice 2. Soit $\mathbb{K}$ un corps.

1. Soit $a \in \mathbb{K}$. Exprimer le reste de la division euclidienne de $P \in \mathbb{K}[X]$ par $(X - a)^2$ en fonction de $P(a)$ et $P'(a)$.
2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer le reste des divisions euclidiennes de $(X - 3)^{2n} + (X - 2)^n - 2$ par $(X - 2)^2$ et $(X - 3)^2$.
(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer le reste des divisions euclidiennes de $(X + 1)^n - X^n - 1$ et $X^{2n} + X^n + 1$ par $X^2 - 2X + 1$.

Exercice 3. Soit $n \geq 4$ un entier. Trouver l'ordre de multiplicité de 1 et de -1 comme racine de $P := X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1$.

Exercice 4. Soit $a_0 \geq 0$ un réel positif. On considère le polynôme

$$P := X^5 - (3a_0 + 1)X^4 + (a_0 + 1)(4a_0 + 1)X^3 - a_0(4a_0^2 + 9a_0 + 3)X^2 + a_0^2(3a_0^2 + 7a_0 + 3)X - a_0^3(a_0 + 1)^2 \in \mathbb{R}[X]$$

1. Montrer que a_0 est racine triple de P .
2. Donner la décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ de P .

Exercice 5. On cherche à déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ non nuls tels que P' divise P .

1. Soit P un tel polynôme.
 - (a) Montrer qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que $P = \alpha(X - \beta)P'$.
 - (b) Par des considération de multiplicité de racines, montrer que β est alors la seule racine possible pour P .
2. Conclure.