Université Aix–Marseille 2019–2020

Licence – Mathématiques
Algèbre 2

COURS À DISTANCE – SEMAINE 6 – POLYNÔMES – CORRIGÉ TD2

Exercice 1. *Déterminez tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré au plus 3 :*

1. *vérifiant $P(1) = P'(1) = 1$;*

   Soit P un tel polynôme. Une première approche consiste à constater que $P - X$ et $(P - X)' = P' - 1$ s'annulent tous les deux en 1. On en déduit que 1 est racine de multiplicité au moins 2 pour $P - X$ et donc que $(X-1)^2$ divise $P - X$. Or $P - X$ étant de degré au plus 3, on a donc $P - X = (X-1)^2 Q$ avec $Q \in \mathbb{C}[X]$ de degré au plus 1, et de fait $P = X + (X-1)^2 Q$.

   On peut retrouver ce résultat par le calcul en notant $P =: ax^3 + bX^2 + cX + d$, avec $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. On a alors $P' = 3aX^2 + 2bX + c$ et donc

$$\left\{\begin{array}{l} 1 = P(1) = a + b + c + d \\ 1 = P'(1) = 3a + 2b + c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} d = 1 - a - b - c \\ c = 1 - 2b - 3a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} d = 1 - a - b - (1 - 2b - 3a) = b + 2a \\ c = 1 - 2b - 3a \end{array}\right. .$$

   On en déduit que

$$\begin{array}{rcl} P & = & ax^3 + bX^2 + (1 - 2b - 3a)X + b + 2a \\ & = & a(X^3 - 3X + 2) + b(X^2 - 2X + 1) + X \\ & = & a(X-1)(X^2 + X - 2) + b(X-1)^2 + X \\ & = & a(X-1)^2(X+2) + b(X-1)^2 + X \\ & = & (X-1)^2(aX + 2a - b) + X. \end{array}$$

   On en déduit que P est de la forme $X + (X-1)^2 Q$ avec $Q \in \mathbb{C}[X]$ de degré au plus 1. Réciproquement, on vérifie directement que l'évaluation de $X + (X-1)^2 Q$ en 1 donne 1, ainsi que l'évaluation de $(X + (X-1)^2 Q)' = 1 + 2(X-1)Q + (X-1)^2 Q'$.

   Dans les deux cas, les solutions sont les polynômes de la forme $X + (X-1)^2 Q$ avec $Q \in \mathbb{C}[X]_1$.

2. *vérifiant $P(0) = 0$, $P'(1) = 1$, $P''(2) = 2$ et $P'''(3) = 3$.*

   Soit $P =: aX^3 + bX^2 + cX + d$, avec $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ une telle solution. On a alors $P' = 3aX^2 + 2bX + c$, $P'' = 6aX + 2b$ et $P''' = 6a$, et donc

$$\left\{\begin{array}{l} 0 = P(0) = d \\ 1 = P'(1) = 3a + 2b + c \\ 2 = P''(2) = 12a + 2b \\ 3 = P'''(3) = 6a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = \frac{1}{2} \\ b = 1 - 6a = 1 - 6.\frac{1}{2} = -2 \\ c = 1 - 2b - 3a = 1 - 2(-2) - 3.\frac{1}{2} = \frac{7}{2} \\ d = 0 \end{array}\right. .$$

   On en déduit que la seule solution possible est $\frac{1}{2}X\left(X^2 - 4X + 7\right)$ dont on vérifie par un calcul direct qu'il est bien solution.

Exercice 2. *Soit $\mathbb{K}$ un corps.*

1. *Soit $a \in \mathbb{K}$. Exprimer le reste de la division euclidienne de $P \in \mathbb{K}[X]$ par $(X-a)^2$ en fonction de $P(a)$ et $P'(a)$.*

   Le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)^2$ est de degré au plus 1, il existe donc $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P = (X-a)^2 Q + \alpha X + \beta$, $\alpha X + \beta$ étant le reste de la division euclidienne. Par calcul direct, on a alors $P' = 2(X-a)Q + (X-a)^2 Q' + \alpha$ et, par évaluation en a, $P(a) = \alpha a + \beta$ et $P'(a) = \alpha$. On en déduit que $\alpha = P'(a)$ et que $\beta = P(a) - a\alpha = P(a) - aP'(a)$.

Au final, le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)^2$ vaut

$$P'(a)X + P(a) - aP'(a) = P'(a)(X-a) + P(a).$$

2. (a) *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer le reste des divisions euclidiennes de $(X-3)^{2n} + (X-2)^n - 2$ par $(X-2)^2$ et $(X-3)^2$.*

   En notant $P := (X-3)^{2n} + (X-2)^n - 2$, on a, par calcul direct, $P' = 2n(X-3)^{2n-1} + n(X-2)^{n-1}$ et, par évaluation directe, $P(2) = (-1)^{2n} + 0 - 2 = -1$, $P(3) = 0 + 1^n - 2 = -1$, $P'(2) = 2n(-1)^{2n-1} + 0 = -2n$ et $P'(3) = 0 + n(1)^{n-1} = n$. D'après la question 1., on en déduit que le reste de la division euclidienne de $(X-3)^{2n} + (X-2)^n - 2$ par $(X-2)^2$ vaut $2n(2-X) - 1$, et que le reste de celle par $(X-3)^2$ vaut $n(X-3) - 1$.

   (b) *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer le reste des divisions euclidiennes de $(X+1)^n - X^n - 1$ et $X^{2n} + X^n + 1$ par $X^2 - 2X + 1$.*

   En notant $P := (X+1)^n - X^n - 1$ et $Q = X^{2n} + X^n + 1$, on a, par calcul direct, $P' = n(X+1)^{n-1} - nX^{n-1}$ et $Q' = 2nX^{2n-1} + nX^{n-1}$ et, par évaluation directe, $P(1) = 2^n - (1)^n - 1 = 2(2^{n-1} - 1)$, $Q(1) = 1^{2n} + 1^n + 1 = 3$, $P'(1) = n2^{n-1} - n1^{n-1} = n(2^{n-1} - 1)$ et $Q'(1) = 2n.1^{n-1} + n.1^{n-1} = 3n$. En remarquant que $X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$, on déduit de la question 1. que le reste de la division euclidienne de $(X+1)^n - X^n - 1$ par $X^2 - 2X + 1$ vaut $n(2^{n-1} - 1)(X-1) + 2(2^{n-1} - 1) = (2^{n-1} - 1)(nX - n + 2)$, et celui de $X^{2n} + X^n + 1$ vaut $3n(X-1) + 3 = 3(nX - n + 1)$.

Exercice 3. *Soit $n \geq 4$ un entier. Trouver l'ordre de multiplicité de 1 et de -1 comme racine de $P := X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1$.*

Pour déterminer la multiplicité de -1 comme racine de P, il faut déterminer la plus petite dérivée de P ne s'annulant pas en -1. Or, par calcul direct, on a

$$P(1) = 1 - n + n - 1 = 0\ ;$$

$$P(-1) = (-1)^{2n} - n(-1)^{n+1} + n(-1)^{n-1} - 1 = 1 - 1 + (-1)^{n-1}(n-n) = 0\ ;$$

$$P' = 2nX^{2n-1} - n(n+1)X^n + n(n-1)X^{n-2}$$

$$P'(1) = 2n - n(n+1) + n(n-1) = 2n - n^2 - n + n^2 - n = 0$$

$$P'(-1) = -2n - (-1)^n n(n+1) + (-1)^{n-2} n(n-1) = 2n\big((-1)^{n-1} - 1\big) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ -4n \neq 0 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}.$$

Donc lorsque n est pair, -1 est racine de multiplicité 1. On peut maintenant supposer que que n est impair lorsque l'on évalue en -1. Alors

$$P'' = 2n(2n-1)X^{2n-2} - n^2(n+1)X^{n-1} + n(n-1)(n-2)X^{n-3}$$

$$P''(1) = P''(-1) = 2n(2n-1) - n^2(n+1) + n(n-1)(n-2) = 4n^2 - 2n - n^3 - n^2 + n^3 - 3n^2 + 2n = 0$$

$$P''' = 2n(2n-1)(2n-2)X^{2n-3} - n^2(n+1)(n-1)X^{n-2} + n(n-1)(n-2)(n-3)X^{n-4}$$

$$P'''(1) = -P'''(-1) = 2n(2n-1)(2n-2) - n^2(n+1)(n-1) + n(n-1)(n-2)(n-3) = 2n(n^2-1) \neq 0.$$

On obtient que 1 est racine triple, ainsi que -1 lorsque n est impair.

Au final, on peut résumer la situation en disant que 1 est racine triple de P et -1 racine de multiplicité $2 - (-1)^n$.

Exercice 4. *Soit $a_0 \geq 0$ un réel positif. On considère le polynôme*

$$P := X^5 - (3a_0+1)X^4 + (a_0+1)(4a_0+1)X^3 - a_0(4a_0^2+9a_0+3)X^2 + a_0^2(3a_0^2+7a_0+3)X - a_0^3(a_0+1)^2 \in \mathbb{R}[X]$$

1. *Montrer que a_0 est racine triple de P.*

   Par un calcul long mais élémentaire que l'on ne reproduira pas ici, on vérifie que P, P' et P'' s'annulent en a_0, mais pas P'''.

2. *Donner la décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ de P.*

   Par une division euclidienne fastidieuse mais élémentaire que l'on ne reproduira pas ici, on trouve que $P = (X-a)^3\big(X^2-X+(a_0+1)^2\big)$. Or le discriminant de $X^2-X+(a_0+1)^2$ valant $1-4(a_0+1)^2 \leq -3 < 0$, ce dernier facteur est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$. On en déduit donc qu'il s'agit de la décomposition de P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 5. *On cherche à déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ non nuls tels que P' divise P.*

1. *Soit P un tel polynôme.*
   (a) *Montrer qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que $P = \alpha(X-\beta)P'$.*
   Puisque P' divise P, il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = QP'$ et on a $\deg(Q) = \deg(P) - \deg(P') = 1$. Il existe donc $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $\overline{\beta} \in \mathbb{C}$ tels que $Q = \alpha X + \overline{\beta}$, et en posant $\beta = -\frac{\overline{\beta}}{\alpha}$, on obtient $Q = \alpha(X-\beta)$. Au final, on a bien $P = \alpha(X-\beta)P'$.
   (b) *Par des considération de multiplicité de racines, montrer que β est alors la seule racine possible pour P.*
   Supposons par l'absurde que $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{\beta\}$ est racine de P avec multiplicité $k \in \mathbb{N}^*$. Alors $(X-\gamma)^k$ divise $P = \alpha(X-\beta)P'$, mais puisque que $(X - gamma)^k$ et $X-\beta$ sont premiers entre eux, γ étant distinct de β, $(X-\gamma)^k$ divise également P'. Autrement dit, γ est racine de multiplicité au moins k de P, ce qui contredit le résultat affirmant que la dérivation diminue la multiplicité des racines de exactement 1.
2. Commençons par remarquer qu'un polynôme constant non nul n'est pas solution du problème, mais que le polynôme nul l'est. Considérons maintenant une solution $P \in \mathbb{C}[X]$ non constante. D'après ce qui précède, P ne peut posséder qu'au plus une racine dans $\mathbb{C}$, il est donc de la forme $\alpha(X-\beta)^k$ avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $\beta \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Réciproquement, on observe que $\Big(\alpha(X-\beta)^k\Big)' = \alpha k(X-\beta)^{k-1}$ divise bien $\alpha(X-\beta)^k$.

   Au final, un polynôme est divisible par son polynôme dérivé si et seulement si il est de la forme $\alpha(X-\beta)^k$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{N}^*$.