Université Aix–Marseille 2019–2020

Licence – Mathématiques
Algèbre 2

COURS À DISTANCE – SEMAINE 7 – TD – PROPRIÉTÉS D'ANNEAUX

Exercice 1. On considère l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{10}] := \big\{a + \sqrt{10}\, b \mid a, b \in \mathbb{Z}\big\}$. L'objectif de cet exercice est de montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$ n'est pas factoriel.

1. (a) Montrer que $\sqrt{10}$ n'est pas rationnel.
   (b) En déduire que, si $a + \sqrt{10}b = a' + \sqrt{10}b'$ avec $a, a', b, b' \in \mathbb{Z}$, alors $a = a'$ et $b = b'$.
2. (a) Soit $a + \sqrt{10}b \in \mathbb{Z}[\sqrt{10}]^\times$.
      i. Montrer que a est non nul, et que a est premier avec b et avec 10.
      ii. Montrer que $a^2 - 10b^2 = \pm 1$.
   (b) Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]^\times = \big\{a + b\sqrt{10} \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ tels que } a^2 - 10b^2 = \pm 1\big\}$.
3. (a) Supposons dans cette question que 2 n'est pas irréductible dans $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$.
      i. Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $a^2 - 10b^2 = \pm 2$.
      ii. Montrer que a est pair et b impair.
      iii. On pose $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ tels que $a = 2\alpha$ et $b = 2\beta + 1$. Montrer que $\alpha^2 - 10\beta(\beta + 1) \in \{2, 3\}$.
      iv. En déduire que, modulo 4, α^2 est congru à 2 ou -1.
   (b) Montrer que 2 est irréductible dans $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$.
4. Montrer que 2 n'est pas premier dans $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$.
5. Conclure.

Exercice 2. On considère l'anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}] := \big\{a + ib\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\big\}$.

1. Montrer que l'application
$$\varphi\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[i\sqrt{5}] & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ a + ib\sqrt{5} & \longmapsto & a^2 + 5b^2 \end{array}$$
   vérifie, pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$, $\varphi(x_1.x_2) = \varphi(x_1).\varphi(x_2)$.
2. A l'aide de φ, déterminer tous les inversibles de $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$.
3. Soit $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$. Montrer que si x_1 divise x_2 avec $x_1 \neq \pm x_2$, alors $\varphi(x_2) > \varphi(x_1)$.
4. A l'aide de φ, déterminer tous les diviseurs non inversibles de 9, puis tous les diviseurs non inversibles de $3(2 + i\sqrt{5})$.
5. Montrer 9 et $3(2 + i\sqrt{5})$ n'ont pas de plus grand diviseur commun dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$.
6. Montrer que 3 et $2 + i\sqrt{5}$ n'ont pas de plus petit multiple commun dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$.
7. L'application φ est-elle un stathme ?

Exercice 3. Soit $\mathbb{Z}[i] \subset \mathbb{C}$ l'anneau des entiers de Gauss. On considère l'application
$$\nu\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[i] & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ a + ib & \longmapsto & a^2 + b^2 \end{array}.$$

1. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe $\widetilde{z} \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $|\widetilde{z} - z|^2 \leq \frac{1}{2}$.
2. En considérant, pour tout $z_1 \in \mathbb{Z}[i]$ et $z_2 \in \mathbb{Z}[i]^*$ une approximation dans $\mathbb{Z}[i]$ de $\frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{C}$, montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau euclidien.
3. Déterminer un plus grand diviseur commun, ainsi qu'une relation de Bézout associée pour $1 + 3i$ et $3 + i$.