Aix–Marseille Université 2019-2020

Mathématiques –Master 1

ALGÈBRE-GÉOMÉTRIE

Exercice 1 On note $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ le corps à deux éléments

On considère l'ensemble $G = GL_2(K)$ des matrices inversibles 2×2 à coefficients dans K.

1. Montrer que G est un groupe pour la multiplication des matrices.
2. Lister les éléments de G.
3. Donner le nombre d'éléments du K-espace vectoriel $E = K^2$.
4. Montrer que tout automorphisme du K-espace vectoriel $E = K^2$ induit une permutation des éléments non nuls de $E = K^2$.
5. Déduire des questions précédentes que G est isomorphe au groupe symétrique S_3.
6. Trouvez les polynômes minimaux des éléments de G.
7. Quels éléments sont diagonalisables ?
8. Montrer qu'il existe un morphisme naturel de $SL_2(\mathbb{Z})$ dans G. Donnez l'indice de son noyau.

Exercice 2 On considère les deux matrices R, S suivantes

$$R = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Soit G le groupe engendré par ces deux matrices.

1. Montrer que G est un sous-groupe fini de $O(2)$.
2. Montrer que G agit sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ par multiplication à gauche.
3. Quelle est l'orbite de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$? Faire un dessin.
4. En déduire le cardinal du stabilisateur de ce vecteur.
5. Montrer que G n'est pas égal à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Exercice 3 On considère le sous-groupe G de $GL_2(\mathbb{C})$ engendré par les matrices

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Trouver le cardinal de G, et lister les éléments et leurs ordres.
2. Montrer que G n'est pas commutatif.
3. On considère le centre $Z(G) = \{h \in G, hg = gh, \forall g \in G\}$.
   (a) Montrer que $Z(G)$ n'est pas réduit à Id.
   (b) Déterminer $Z(G)$.
4. Lister les sous-groupes distingués de G.