

Master 1 – Mathématiques & Applications
Algèbre & Géométrie

DEVOIR SURVEILLÉ 1

Notation. Pour tout groupe G , on rappelle que le centre de G est défini par

$$Z(G) := \{g \in G \mid \forall h \in G, gh = hg\},$$

et que le *sous-groupe dérivé* de G est défini comme le sous-groupe

$$D(G) := \langle [g_1, g_2] \mid g_1, g_2 \in G \rangle,$$

engendré par les commutateurs, eux-même définis par $[g_1, g_2] := g_1.g_2.g_1^{-1}.g_2^{-1}$.

Exercice 1.

Soit G un groupe et $H \subset G$ un sous-groupe. On dit que H est *caractéristique* si $\varphi(H) = H$ pour tout $\varphi \in \text{Aut}(G)$.

1. Montrer que H est caractéristique ssi $\varphi(H) \subset H$ pour tout $\varphi \in \text{Aut}(G)$.
2. Montrer que $\{e_G\}$, $Z(G)$, $D(G)$ et G sont des sous-groupes caractéristiques de G .
3. Montrer que si H est caractéristique, alors H est distingué.
4. Donner un exemple explicite de sous-groupe distingué $H \triangleleft G$ qui ne soit pas caractéristique.
(indication : on pourra prendre G abélien)
5. Montrer que la relation binaire $\prec$ définie sur les groupes par

$$(H \prec G) \Leftrightarrow (H \text{ est un sous-groupe caractéristique de } G)$$

est une relation d'ordre.

6. Montrer que la relation binaire $\triangleleft$ n'est pas une relation d'ordre.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\omega_n := e^{i\frac{\pi}{n}}$ et, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on pose

$$a_k := \begin{pmatrix} \omega_n^k & 0 \\ 0 & \omega_n^{-k} \end{pmatrix}; \quad b_k := \begin{pmatrix} 0 & \omega_n^k \\ \omega_n^{n-k} & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $D_n := \{a_k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{b_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ forme un groupe, que l'on appellera *groupe dicyclique*, pour la multiplication matricielle.
2. (a) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, déterminer l'ordre de a_k et de b_k .
 (b) Montrer que $b_0 = a_1.b_0.a_1$.
 (c) Montrer que tout élément de D_n s'écrit de manière unique sous la forme $a_1^r.b_0^s$ avec $r \in \llbracket 0, 2n-1 \rrbracket$ et $s \in \{0, 1\}$.
 (d) Déterminer l'ordre de D_n .
3. (a) Montrer que D_1 est isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
 (b) Montrer que, si $n \geq 2$, D_n est non abélien.
4. (a) Montrer que le groupe dérivé $D(D_n)$ de D_n est engendré par a_2 .
 (b) Montrer que $D_n/D(D_n) \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ si n est impair et $D_n/D(D_n) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ si n est pair.
5. Dans cette question, on suppose que n est impair.
 (a) Montrer que, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et $r \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$, $b_0^r.a_{2k}.b_0^{-r} = a_{2k}^{(-1)^r}$.
 (b) Montrer que D_n est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ avec

$$\varphi: \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & \longrightarrow & \text{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \\ r & \longmapsto & (k \mapsto (-1)^r k) \end{array}.$$