Université Aix-Marseille 2019–2020

Master 1 – Mathématiques & Applications
Algèbre & Géométrie

TD2 : GROUPES DE PERMUTATION

Exercice 1.

1. Décomposer $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 6 & 4 & 9 & 10 & 2 & 5 & 8 & 1 & 7 \end{pmatrix}$, puis calculer son ordre et sa signature.
2. Ecrire la permutation $(1324) \in \mathfrak{S}_4$ comme produits d'au plus 3 transpositions.

Exercice 2.

1. Déterminer le nombre
   (a) d'éléments d'ordre 8 dans $\mathfrak{S}_{42}$;
   (b) d'éléments d'ordre 20 dans $\mathfrak{S}_{15}$.
2. Montrer qu'une permutation d'ordre 14 dans $\mathfrak{S}_{10}$ possède un unique point fixe et est de signature -1.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On tire au hasard une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. En supposant que les permutations sont équiréparties, calculer la probabilité que

1. σ fixe n ;
2. σ n'ait aucun point fixe ;
3. σ fixe exactement éléments avec $k \in \{1, \ldots, n\}$;
4. σ possède un élément d'ordre au moins $\frac{n}{2}$.

Exercice 4. Soit $n \geq 4$ un entier.

- Montrer qu'un produit de deux transpositions de $\mathcal{A}_n$ peut s'écrire comme un produit de 3–cycles.
- Montrer que $\mathcal{A}_n$ est engendré par les 3–cycles.
- Montrer que $\mathcal{A}_n$ est engendré par les $(n-2)$ 3–cycles $(123), (124), \ldots, (12n)$.

Exercice 5. Soit $n \geq 3$ un entier. Le but de l'exercice est de montrer que le centre $Z(\mathcal{S}_n)$ du groupe $\mathcal{S}_n$ est réduit à l'identité.

1. Soit $i \in \{1 \ldots n\}$, donner un exemple de permutation s fixant i et seulement i.
2. Soit $\sigma \in Z(\mathcal{S}_n)$, en utilisant le fait que $s \circ \sigma = \sigma \circ s$, montrer que $\sigma(i) = i$. Conclure que le centre de $\mathcal{S}_n$ est réduit à l'identité.
3. Déduire du résultat précédent que $\mathcal{S}_n$ n'a pas de sous-groupe distingué d'ordre 2.

Exercice 6. Soit $G \subset \mathfrak{S}_n$ agissant transitivement sur $\{1, \ldots, n\}$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on note $G_i \subset G$ le sous-ensemble des éléments fixant i.

1. Montrer que G_i est un sous-groupe d'indice n.
2. Montrer que $\cup_i^n G_i \neq G$.
3. En déduire qu'il existe un élément de G agissant sans point fixe.

Exercice 7.

1. Montrer qu'il existe un morphisme injectif de $\mathcal{S}_n$ dans $\mathcal{A}_{n+2}$.
2. Trouver les morphismes de S_n dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Exercice 8. Un des but de l'exercice est de montrer que tous les 3–cycles sont conjugués dans $\mathcal{A}_n$ dès lors que $n \geq 5$.

On dit qu'un groupe G agit *p–transitivement* sur un ensemble X si, étant donnés $x_1, \ldots, x_p$ éléments de X distincts et $y_1, \ldots, y_p$ éléments de X distincts, il existe g élément de G tel que, pour tout i compris entre 1 et p, $g.x_i = y_i$. On dit également que l'action est *p–transitive*.

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que toute action $(p+1)$–transitive est p–transitive.
2. Montrer que $\mathcal{S}_n$ agit n–transitivement sur $\{1,\ldots,n\}$.
3. Montrer que $\mathcal{A}_n$ agit $(n-2)$–transitivement sur $\{1,\ldots,n\}$.
4. En déduire que, pour $n \geq 5$, les 3-cycles sont conjugués dans $\mathcal{A}_n$.

Exercice 9. Le but de l'exercice est de montrer que $\mathcal{A}_4$ n'est pas simple.

1. Faire la liste des éléments de $\mathcal{A}_4$, donner leurs ordres.
2. On considère l'ensemble suivant :

$$H := \left\{ \mathrm{Id} \ , \ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \ , \ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \ , \ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

   Montrer que H est un sous-groupe distingué de $\mathcal{A}_4$ isomorphe au groupe de Klein. Pour montrer qu'il est distingué, on étudiera les ordres des éléments.

Exercice 10. Le but de l'exercice est de montrer que $\mathcal{A}_5$ est simple. Pour cela, on considère $N \lhd \mathcal{A}_5$.

1. Montrer que si (12345) appartient à N, alors (23145) aussi, ainsi que (412).
2. Montrer que si $(12)(34)$ appartient à N, alors $(15)(34)$ aussi, ainsi que (152)
3. Conclure que $\mathcal{A}_5$ est simple.

Exercice 11. Le but de l'exercice est de montrer que $\mathcal{A}_n$ est simple pour tout $n > 5$. Pour cela, on suppose, par récurrence, que $\mathcal{A}_{n-1}$ est simple et, par l'absurde, qu'il existe $N \lhd \mathcal{A}_n$ avec $N \neq \mathcal{A}_n$ et $\sigma \in N \setminus \{\mathrm{Id}\}$.

1. On suppose ici que $\sigma(n) = n$.
   (a) Montrer que $\mathcal{A}_{n-1}$ s'identifie aux éléments de $\mathcal{A}_n$ qui fixent n et que, sous cette identification, $\mathcal{A}_{n-1} \cap N \lhd \mathcal{A}_{n-1}$.
   (b) En déduire que $\mathcal{A}_{n-1} \subset N$.
   (c) En conclure que $N = \mathcal{A}_n$.
   (d) En conclure, plus généralement, que si $\rho \in N$ avec $\rho(n) = n$, alors $\rho = \mathrm{Id}$.
2. On suppose ici que $\sigma(n) = \sigma^{-1}(n) \neq n$.
   (a) Montrer que $\sigma^2 = \mathrm{Id}$.
   (b) Soit $i \neq j \in \{1,\ldots,n\} \setminus \big\{n, \sigma(n)\big\}$. On note $\tau := (ij)\big(n\sigma(n)\big)$ et $\sigma_1 := \tau.\sigma.\tau.\sigma$.
      i. Montrer que σ_1 est un élément de N fixant n.
      ii. En déduire que $\sigma = \tau.\sigma.\tau$, puis que $\sigma\big(\{i,j\}\big) = \{i,j\}$.
   (c) En conclure que $\sigma = \big(n\sigma(n)\big) \notin \mathcal{A}_n$.
3. On suppose ici que $\sigma^{-1}(n)$, n et $\sigma(n)$ sont deux à deux distincts.
   (a) Soit $i \neq j \in \{1,\ldots,n\} \setminus \big\{\sigma^{-1}(n), n, \sigma(n)\big\}$. On note $\tau := (ij)\big(n\sigma(n)\big)$ et $\sigma_2 := \sigma^{-1}.\tau.\sigma.\tau.\sigma^{-1}$.
      i. Montrer que σ_2 est un élément de N fixant n.
      ii. En déduire que $\tau.\sigma.\tau = \sigma^2$, puis que $\sigma^3 = \mathrm{Id}$.
      iii. En conclure que σ est la composé de 3–cycles disjoints.
   (b) En supposant par l'absurde que σ contient un 3–cycle $\big(k, \sigma(k), \sigma^2(k)\big)$ distinct de $\big(n, \sigma(n), \sigma^2(n)\big)$, et en posant $\sigma_3 = \sigma.\big(n,k,\sigma(n)\big).\sigma.\big(n,\sigma(n),k\big)$, montrer que $k = \sigma_3(k) = \sigma(n)$.
   (c) En conclure que $N = \mathcal{A}_n$.
4. Conclure.

Exercice 12. Soit $n \geq 5$ un entier.

1. Montrer que les seuls sous-groupes distingués de $\mathcal{S}_n$ sont $\{\mathrm{Id}\}$, $\mathcal{A}_n$ et $\mathcal{S}_n$.
2. Trouver tous les morphismes de S_n dans S_{n-1}.
3. Montrer qu'un sous-groupe de S_n d'indice n est isomorphe à S_{n-1}.

Exercice 13. Le but de l'exercice est de montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{6\}$, tous les automorphismes de $\mathfrak{S}_n$ sont *intérieurs*, c'est-à-dire de la forme $(g \mapsto g_0^{-1}.g.g_0)$ pour un certain $g_0 \in \mathfrak{S}_n$.

1. On fixe ici $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{6\}$ et $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_n)$.

(a) Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, montrer que $Z_{\mathfrak{S}_n}\big(\varphi(\sigma)\big) = \varphi\big(Z_{\mathfrak{S}_n}(\sigma)\big)$, où $Z_{\mathfrak{S}_n}(g)$ dénote le sous-groupe des éléments de $\mathfrak{S}_n$ qui commute avec $g \in \mathfrak{S}_n$.

(b) Pour tout $\sigma' \in \mathfrak{S}_n$, donner la décomposition en cycles disjoints de $\sigma'.\sigma.\sigma'^{-1}$ en fonction de celle de σ.

(c) Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on note k_i le nombre de i–cycles dans la décomposition en cycles disjoints de σ. Montrer que $|Z_{\mathfrak{S}_n}(\sigma)| = \prod_{i=1}^n k_i! i^{k_i}$.

(d) En déduire que φ envoie toute transposition sur une transposition.

(e) En déduire que φ est intérieur.

2. Le but de cette question est de montrer que le résultat tombe en défaut pour $n = 6$.

   (a) Soit $n \geq 5$. On suppose que tous les automorphismes de $\mathfrak{S}_n$ sont intérieurs et on cherche à montrer que tout sous-groupe $H \subset \mathfrak{S}_n$ d'indice n possède un point fixe.

      i. Montrer que l'action par multiplication à gauche de $\mathfrak{S}_n$ sur les classes de H est fidèle.

      ii. En déduire un automorphisme φ_H de $\mathfrak{S}_n$ tel que $H = \varphi_H^{-1}\big(\mathrm{Stab}(1)\big)$.

      iii. En déduire que H est conjugué à Stab(1).

      iv. Conclure.

   (b) i. Montrer qu'il y a six 5–Sylows dans $\mathfrak{S}_5$.

      ii. Montrer que l'action par conjugaison de $\mathfrak{S}_5$ sur l'ensemble de ses 5–Sylows est fidèle et transitive.

      iii. En déduire l'existence d'un sous-groupe de $\mathfrak{S}_6$ d'indice 6 agissant transitivement sur $\{1, \dots, 6\}$.

   (c) En déduire qu'il existe un automorphisme de $\mathfrak{S}_6$ qui ne soit pas intérieur.

Exercice 14. Le jeu de taquin est composé de 15 petits carrés numérotés de 1 à 15 disposés sur les cases d'une grille carrée de coté 4. Une des cases de la grille est donc vide et chacun des carrés peut être déplacé horizontalement ou verticalement d'une case lorsqu'il jouxte la case vide (il vient donc se positionner sur la case anciennement vide, et son ancienne case devient vide) :

10	15	5	4
12	13	9	7
6	3	→	2
11	8	1	14

$\rightarrow$

10	15	5	4
12	13	9	7
6		3	2
11	8	1	14

10	15	5	4
12	13	9	7
6	3	↓	2
11	8	1	14

$\rightarrow$

10	15	5	4
12	13		7
6	3	9	2
11	8	1	14

.

La position initiale est

2	1	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

et le but du jeu est d'arriver à la position

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

.

Montrer que cela est impossible.