Université Aix-Marseille 2019–2020

Master 1 – Mathématiques & Applications
Algèbre & Géométrie

TD3 : groupes linéaires

Dans tout ce qui suit, E est un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ sur un corps k.

Exercice 1.

1. Dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, déterminer l'orbite sous l'action par conjugaison de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Faire de même pour $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$.
2. Montrer que les matrices $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec $\lambda, \mu \in k^*$ sont conjuguées dans $\mathrm{SL}_2(k)$ ssi $\frac{\lambda}{\mu}$ est un carré dans k. En déduire le nombre de classes de conjugaison de ces matrices lorsque $k = \mathbb{C}$, $k = \mathbb{R}$ et $k = \mathbb{Q}$.

Exercice 2. Montrer que $\mathrm{GL}(E) \cong k^* \rtimes_\varphi \mathrm{SL}(E)$ pour une action φ de k^* sur $\mathrm{GL}(E)$ que l'on précisera.

Exercice 3. On suppose dans cet exercice que $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et on munit $\mathrm{GL}(E)$ et $\mathrm{SL}(E)$ de la topologie induite par celle de k^{n^2} en fixant une base de E et l'utilisant pour identifier $\mathrm{GL}(E)$ à $\mathrm{GL}_n(k)$.

1. Montrer que le produit matriciel est continu.
2. Montrer que le déterminant est continu.
3. Montrer que l'application inverse est continue.
4. Montrer que la topologie ne dépend pas du choix de la base.

Exercice 4. Pour tout ensemble topologique X, on dit que deux éléments $x_1, x_2 \in X$ sont *connectés par arc* s'il existe un chemin $\gamma : [0,1] \to X$ continue tel que $\gamma(0) = x_1$ et $\gamma(1) = x_2$. Cela définit une relation d'équivalence sur X, les classes de la partition associée de X sont appelées *composantes connexes* de X. On dit que X est *connexe par arcs* s'il ne possède qu'une seule composante connexe.

On munit $\mathrm{GL}(E)$ et $\mathrm{SL}(E)$ de la topologie de l'exercice précédent.

1. On suppose dans cette question que $k = \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que $\mathrm{SL}(E)$ est connexe par arcs.
   (b) Montrer que $\mathrm{GL}_n(k)$ a deux composantes connexes.
2. On suppose dans cette question que $k = \mathbb{C}$. Montrer que $\mathrm{SL}(E)$ et $\mathrm{GL}(E)$ sont connexes par arcs.

Exercice 5. Soit $u \in \mathrm{GL}(E)$ et $1 \leq r \leq n-1$. Montrer que si u laisse stable tous les sous espaces vectoriels de dimension r alors u est une homothétie.

Exercice 6.

1. Montrer que le conjugué d'une transvection de droite D par $u \in \mathrm{GL}(E)$ est une transvection de droite $u(D)$.
2. Déterminer le centre de $\mathrm{GL}(E)$.
3. Déterminer le centre de $\mathrm{SL}(E)$.

Exercice 7. On suppose dans cet exercice que $n \geq 3$ et que k est de caractéristique différente de 2. On rappelle que sous-groupe dérivé $D(G)$ d'un groupe G est le sous-groupe engendré par les commutateurs de la forme $[g_1, g_2] = g_1^{-1}.g_2^{-1}.g_1.g_2$ avec $g_1, g_2 \in G$.

1. Soit τ une transvection de E. Montrer que τ^2 est également une transvection et en déduire qu'il existe $u \in \mathrm{GL}(E)$ tel que $\tau = [\tau, u]$.
2. Montrer que $D\big(\mathrm{GL}(E)\big) = D\big(\mathrm{SL}(E)\big) = \mathrm{SL}(E)$.

Exercice 8. Le but de l'exercice est de montrer que, si k n'est pas de caractéristique 2, $\mathrm{GL}(E)$ est engendré par les automorphismes diagonalisables (et, de manière équivalente, par les dilatations).

1. Montrer que $u \in \mathrm{GL}(E)$ est une transvection ou une dilatation ssi il existe $a \in E \setminus \{0\}$ et une forme linéaire $\varphi \in E^*$ tels que $u = \mathrm{Id}_E + \varphi.a$ (càd $u(x) = x + \varphi(x).a$ pour tout $x \in E$), u étant alors une transvection ssi $a \in \mathrm{Ker}(\varphi)$.
2. On suppose dans cette question que k n'est pas de caractéristique 2.
   (a) En reprenant les notations de la question précédente, soit $u =: \mathrm{Id}_E + \varphi.a$ une transvection.
      i. Montrer qu'il existe une forme linéaire $\varphi_1 \in E^*$ valant 1 en a.
      ii. Montrer que $\varphi_2 := \frac{1}{2}(\varphi - \varphi_1)$ est une forme linéaire qui ne s'annule pas en a.
      iii. Montrer que $u = u_1 \circ u_2$ avec $u_i := \mathrm{Id}_E + \varphi_i.a$ pour $i = 1, 2$.
   (b) Montrer que $\mathrm{GL}(E)$ est engendré par les dilatations.
   (c) Montrer que $\mathrm{GL}(E)$ est engendré par les automorphismes diagonalisables.

Exercice 9. Le but de l'exercice est de montrer que, si $n \geq 2$, $\mathrm{GL}(E)$ est engendré par les automorphismes de trace nulle.

1. Ecrire la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ comme produit de deux matrices de trace nulle.
2. On suppose dans cette question que $n \geq 3$.
   (a) Montrer que tout automorphisme de E qui permute cycliquement les éléments d'une base de E est de trace nulle.
   (b) Montrer que toute transvection peut s'écrire comme composé de deux automorphismes de trace nulle.
3. Montrer que $\mathrm{SL}(E)$ est engendré par les automorphismes de trace nulle.
4. Montrer que $\mathrm{GL}(E)$ est engendré par les automorphismes de trace nulle.

Exercice 10.

1. On appelle drapeau toute suite $\mathbf{V} := (V_0, v_1, \ldots, v_n)$ de sous-espace vectoriels de E strictement croissante pour l'inclusion.
   (a) i. Montrer que, pour tout drapeau $\mathbf{V}$, on a $V_0 = \{0\}$ et $V_n = E$.
      ii. Montrer que l'application
$$\delta : \begin{array}{ccc} \big\{\text{base } (e_1, \ldots, e_i) \text{ de } E\big\} & \to & \big\{\text{drapeau de } E\big\} \\ (e_1, \ldots, e_i) & \mapsto & \big(\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_i)\big)_{i \in \{0, \ldots, n\}} \end{array}$$
      est surjective. On dit qu'une base $\mathcal{B}$ est *adaptée* à un drapeau $\mathbf{V}$ si $\delta(\mathcal{B}) = \mathbf{V}$; et on dit qu'elle est *quasi-adaptée* à $\mathbf{V}$ si une permutation de ses éléments donne une base adaptée à $\mathbf{V}$.
      iii. Montrer que $\mathrm{GL}(E)$ agit transitivement sur l'ensemble des drapeaux et montrer que le stabilisateur d'un drapeau est isomorphe au groupe des matrices triangulaires supérieures inversibles.
   (b) Soit $\mathbf{V}$ et $\mathbf{W}$ deux drapeaux. On définit $s : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ par
$$s(i) := \min\big\{j \in \{1, \ldots, n \mid W_i \subset W_{i-1} + v_j\big\}.$$
      i. Montrer que $s \in \mathfrak{S}_n$ et que toute permutation peut être ainsi réalisée.
      ii. En construisant une famille $(x_1, \ldots, x_n)$ d'éléments de E telle que, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$,
$$\begin{cases} W_i = W_{i-1} \oplus k.x_i \\ V_{s(i)} = V_{s(i)-1} \oplus k.x_i \\ x_i \notin W_{i-1} + V_{s(i)-1} \end{cases},$$
      montrer qu'il existe une base simultanément adaptée à $\mathbf{W}$ et quasi-adaptée à $\mathbf{V}$.
   (c) Soit $A \in \mathrm{GL}_n(k)$. On note
      - $\mathcal{B}_1$ la base canonique de k^n,
      - $\mathcal{B}_2$ la base formée par les colonnes de A,

- $\mathcal{B}_1'$ une base adaptée à $\delta(\mathcal{B}_1)$ et quasi-adaptée à $\delta(\mathcal{B}_2)$,
- $\mathcal{B}_2'$ la permutation de $\mathcal{B}_1'$ adaptée à $\delta(\mathcal{B}_2)$.

i. Montrer que la matrice de passage
   - de $\mathcal{B}_2$ vers $\mathcal{B}_2'$ est triangulaire supérieure,
   - de $\mathcal{B}_2'$ vers $\mathcal{B}_1'$ est une matrice de permutation,
   - de $\mathcal{B}_1'$ vers $\mathcal{B}_1$ est triangulaire supérieure et que, quitte à renormaliser, on peut même supposer qu'elle est unipotente (c'est-à-dire avec des 1 sur la diagonale).

ii. En déduire que A s'écrit sous la forme UPV avec U une matrice triangulaire supérieure unipotente, P une matrice de permutation et V une matrice triangulaire supérieure.

(d) Montrer que

$$\mathrm{GL}_n(k) = \bigsqcup_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathcal{U} P_\sigma \mathcal{T}$$

où $\mathcal{U}$ est le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures unipotentes, $\mathcal{T}$ le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures inversibles, et P_σ la matrice associée à la permutation σ (attention, il s'agit d'une réunion disjointe sur $\mathfrak{S}_n$). C'est ce qu'on appelle la *décomposition de Bruhat*.

2. Redémontrer l'existence de la décomposition de Bruhat par des considérations d'opérations sur les lignes et les colonnes.