

On justifiera chaque réponse.

Exercice 1 On considère l'ensemble S_4 des permutations de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$.

- Quel est l'ordre du groupe S_4 ?
- Donner l'ordre de $\sigma = (123) \circ (34)$.
- Décrire le groupe engendré par σ .
- Ce sous-groupe est-il distingué dans S_4 ?

Exercice 2 Combien existe-t-il, à isomorphisme près, de groupes de cardinal 7.

Exercice 3 Le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est-il isomorphe à un sous-groupe du groupe orthogonal $O(2)$?

Exercice 4 Trouver un polynôme de degré 2 dans $\mathbb{Z}[X]$ dont $\sqrt{2} - 4$ est racine.

Exercice 5 Énoncer le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$. Donner un exemple.

Exercice 6 En justifiant votre réponse, donner un exemple de corps fini.

Exercice 7 On considère $K = \mathbb{R}[X]/(X^2 + 2)$. Si P est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, on note $[P]$ son image dans K .

1. Montrer que K est un corps dont on précisera les lois.
2. Quel est l'inverse de $[X]$?
3. Donner un corps L inclus dans K .