

Chapitre 2 : Fonctions d'une variable réelle

Table des matières

1	Introduction	2
1.1	Notations	2
1.2	Ensembles usuels	2
1.3	Règles de calcul dans $\mathbb{R}$	3
2	Fonction d'une variable réelle	4
2.1	Définitions	4
2.2	Monotonie	5
2.3	Parité et périodicité	6
2.4	Composition de deux fonctions	6
2.5	Antécédent, image directe et image réciproque	7
2.6	Bijektivité et fonction réciproque	7
2.7	Continuité et dérivabilité d'une fonction	10
2.8	Étude des variations d'une fonction	12
3	Fonctions usuelles	12
3.1	La valeur absolue	12
3.2	Fonctions trigonométriques	13
3.3	Fonction polynomiale	17
3.4	Fonction logarithme	18
3.5	Fonction exponentielle	18
3.6	Fonctions puissances et leurs réciproques	19
4	Techniques de calcul de limites	19
4.1	Fractions rationnelles	19
4.2	Limite de fonctions composées	20
4.3	Astuces récurrentes	20
4.4	Théorème des gendarmes	21
4.5	Croissances comparées	22
4.6	Règle de l'Hospital	22
5	Théorèmes fondamentaux	23
A	Formulaire	26
B	Exercices	28

1 Introduction

1.1 Notations

Nous introduisons ici quelques notations qui seront utilisées par la suite pour l'écriture d'assertions mathématiques :

- le symbole « $\forall$ » veut dire « pour tout » ou bien « quel que soit » ;
- le symbole « $\exists$ » veut dire « il existe » ;
- le symbole « $\exists!$ » veut dire « il existe un unique » ;
- le symbole « $:$ » veut dire « tel que » ;
- le symbole « $\Rightarrow$ » veut dire « implique » ou encore « si alors » ;
- le symbole « $\Leftrightarrow$ » veut dire « est équivalent à » ou encore « si et seulement si ».

Exemples. Voici quelques exemples de lecture d'assertions mathématiques.

1. « $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 3$ » se lit « Pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f(x)$ est strictement supérieur à 3. »
2. « $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \geq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$ » se lit « Pour tout x dans $\mathbb{R}$, pour tout y dans $\mathbb{R}$, x supérieur ou égal à y implique $f(x)$ supérieur ou égal à $f(y)$, » ou encore « Pour tout x dans $\mathbb{R}$, pour tout y dans $\mathbb{R}$, si x est supérieur ou égal à y alors $f(x)$ est supérieur ou égal à $f(y)$, »
3. « $\exists x \in \mathbb{R}^- : f(x) \leq 1$ » se lit « Il existe x dans $\mathbb{R}^-$ tel que $f(x)$ est strictement plus petit que 1 ».
4. « $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} : y = f(x)$ » se lit « Pour tout y dans $\mathbb{R}$, il existe x dans $\mathbb{R}$ tel que y est égal à $f(x)$. »
5. « $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ » se lit « Pour tout x et y dans $\mathbb{R}$, $f(x)$ égal à $f(y)$ implique que x est égal à y » ou encore « Pour tout x et y dans $\mathbb{R}$, si $f(x)$ est égal à $f(y)$ alors x est égal à y . »
6. « $\forall x, y \in \mathbb{R}_+, x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = y$ » se lit « Pour tout x, y dans $\mathbb{R}_+$ x^2 est égal à y^2 si et seulement si x est égal à y . »
7. « $\exists! x \in \mathbb{R} : x^2 = 0$ » se lit « Il existe un unique x dans $\mathbb{R}$ tel que x^2 est égal à 0. »

1.2 Ensembles usuels

L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ possède les sous-ensembles remarquables suivants :

- $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ l'ensemble des entiers naturels ;
- $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$ l'ensemble des entiers naturels privé de 0 ;
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ l'ensemble des entiers relatifs ;
- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^* \right\}$ l'ensemble des rationnels ;
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ l'ensemble des irrationnels ;
- $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$, et $\mathbb{R}_- =]-\infty, 0]$;
- $\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} =]0, +\infty[$ et $\mathbb{R}_-^* = \mathbb{R}_- \setminus \{0\} =]-\infty, 0[$.

Remarque : Rappelons que l'on a les inclusions $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a < b$ un intervalle de $\mathbb{R}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ prenant l'une des formes suivantes :

$$\begin{aligned} [a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} ; \\]a, b[&= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} ; \\ [a, b[&= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} ; \\]a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} ; \\ [a, +\infty[&= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} ; \\]a, +\infty[&= \{x \in \mathbb{R} : x > a\} ; \\]-\infty, b] &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\} ; \\]-\infty, b[&= \{x \in \mathbb{R} : x < b\} . \end{aligned}$$

1.3 Règles de calcul dans $\mathbb{R}$

Pour tout $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ on utilisera fréquemment les règles de calcul suivantes :

$$\begin{aligned} a \times b = 0 &\Leftrightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0 ; & (a = b \text{ et } c = d) &\Rightarrow a + c = b + d ; \\ a < b &\Leftrightarrow (a \leq b \text{ et } a \neq b) ; & (a = b \text{ et } c = d) &\Rightarrow a \times c = b \times d ; \\ (a \leq b \text{ et } b \leq a) &\Leftrightarrow a = b ; & (a \leq b \text{ et } c \leq d) &\Rightarrow a + c \leq b + d ; \\ (a \leq b \text{ et } b \leq c) &\Rightarrow a \leq c ; & (a \leq b \text{ et } c \geq 0) &\Rightarrow a \times c \leq b \times c ; \\ & & (a \leq b \text{ et } c \leq 0) &\Rightarrow a \times c \geq b \times c . \end{aligned}$$

Proposition 1.1 Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Si a et b sont de même signe alors on a :

$$a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b.$$

Proposition 1.2 Soient $a, b \in \mathbb{R}$, alors on a :

- si $a, b \in \mathbb{R}_+$ alors $a \leq b \Leftrightarrow a^2 \leq b^2$;
- si $a, b \in \mathbb{R}_-$ alors $a \leq b \Leftrightarrow a^2 \geq b^2$;
- si $a \in \mathbb{R}_-$ et $b \in \mathbb{R}_+$ alors on a toujours $a \leq \sqrt{b}$;
- si $a \in \mathbb{R}_+$ et $b \in \mathbb{R}_+$ alors $a \leq \sqrt{b} \Leftrightarrow a^2 \leq b$.

Remarque : La condition sur le signe énoncée dans les résultats précédents est indispensable. En effet, on a :

$$\begin{aligned} (-3)^2 &= 3^2 \text{ mais } -3 \neq 3 ; \\ -3 &< 2 \text{ mais } (-3)^2 = 9 \geq 4 = 2^2 . \end{aligned}$$

Exemple. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x + 1 \leq \sqrt{x^2 + 1}$ (*).

Si $x + 1 < 0$, alors (*) est toujours vérifiée et on trouve comme premier ensemble de solutions

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R} : x + 1 < 0\} =]-\infty, -1[.$$

Si $x + 1 \geq 0$, alors (*) $\Leftrightarrow (x + 1)^2 \leq (\sqrt{x^2 + 1})^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 \leq x^2 + 1 \Leftrightarrow 2x \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$. On trouve comme deuxième ensemble de solutions

$$S_2 =]-\infty, 0] \cap [-1, +\infty[= [-1, 0].$$

Conclusion : l'ensemble des solutions de (*) est $S = S_1 \cup S_2 =]-\infty, -1[\cup [-1, 0] =]-\infty, 0]$.

2 Fonction d'une variable réelle

Dans toute la suite, on considère E et F deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$ (ce que l'on note respectivement $E \subset \mathbb{R}$ et $F \subset \mathbb{R}$).

2.1 Définitions

Définition Une fonction d'une variable réelle c'est la donnée de trois choses :

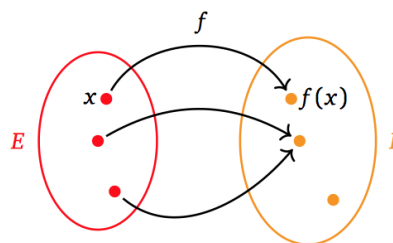
1. un ensemble de départ E ;
2. un ensemble d'arrivée F ;
3. un procédé qui transforme tout élément de E en un élément de F .

Remarque : Dans toute la suite on écrira « fonction » plutôt que « fonction d'une variable réelle » par soucis de concision.

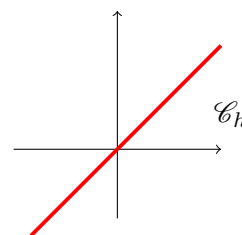
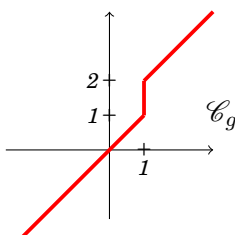
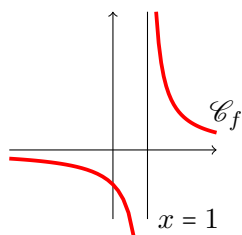
Notation Une fonction f sera notée

$$\begin{aligned} f : E &\rightarrow F \\ x &\mapsto f(x), \end{aligned}$$

où pour tout $x \in E$, $f(x)$ l'**image** de x par la fonction f .



Exemples. Les courbes représentatives suivantes appartiennent-elles à des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?



.....

.....

.....

.....

.....

Définition Si $f : E \rightarrow F$ est une fonction, l'ensemble E est appelé **domaine de définition** de la fonction f . On le note aussi $\mathcal{D}_f$. En particulier, le domaine de définition ne contient que des éléments qui possèdent une image par le procédé de transformation $x \mapsto f(x)$.

Remarque : En pratique, si une fonction f n'est donnée que par la formule $f(x)$ et que l'on souhaite déterminer son domaine (maximal) de $\mathcal{D}_f$, on cherchera :

- les éléments $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels $f(x)$ n'existe pas et on les « enlève » de $\mathbb{R}$ (par exemple lorsque l'on a une fraction dans l'expression de la fonction et un dénominateur susceptible de s'annuler) ;

- ou bien les éléments x pour lesquels $f(x)$ existe (par exemple lorsqu'on a une expression qui contient une racine ou un logarithme).

Exemples. Soient E_1, E_2 et E_3 trois sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Déterminer les domaines maximaux de définition E_1, E_2 et E_3 des fonctions f_1, f_2 et f_3 suivantes :

$$f_1: \begin{array}{ccc} E_1 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array} ; \quad f_2: \begin{array}{ccc} E_2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x+1} \end{array} ; \quad f_3: \begin{array}{ccc} E_3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{x-2}} \end{array} .$$

- $1/x$ n'est pas défini seulement lorsque $x = 0$, ainsi, $E_1 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- $\sqrt{x+1}$ est défini lorsque $x+1 \geq 0$ c'est à dire pour $x \geq -1$. On en déduit que $E_2 = [-1, +\infty[$;
- $\frac{1}{\sqrt{x-2}}$ est défini lorsque

$$\begin{aligned} x-2 \geq 0 \text{ et } \sqrt{x-2} \neq 0 &\Leftrightarrow x \geq 2 \text{ et } x \neq 2 ; \\ &\Leftrightarrow x \in [2, +\infty[\text{ et } x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} ; \\ &\Leftrightarrow x \in \cap[2, +\infty[\cap (\mathbb{R} \setminus \{2\}). \end{aligned}$$

On en déduit que $E_3 =]2, +\infty[$.

Proposition 2.1 Deux fonctions $f_1 : E_1 \rightarrow F_1$ et $f_2 : E_2 \rightarrow F_2$ sont **égales** si et seulement si les trois points suivants sont vérifiés :

1. $E_1 = E_2$ (égalité des ensembles de départ) ;
2. $F_1 = F_2$ (égalité des ensembles d'arrivée) ;
3. $\forall x \in E_1 = E_2, f_1(x) = f_2(x)$ (égalité du processus de transformation).

Si ces trois propriétés sont vérifiées, on note alors $f_1 = f_2$.

Exemple. Les fonctions

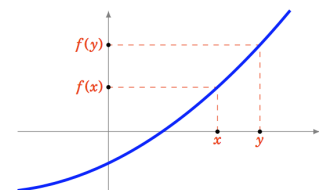
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+1 \end{array} \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{ccc} [0, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+1 \end{array}$$

ne sont pas égales car les ensembles de départ ne sont pas les mêmes.

2.2 Monotonie

Définitions. Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un sous-ensemble E de $\mathbb{R}$. On dit que :

- f est croissante sur E si $\forall x, y \in E, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$;
- f est strictement croissante sur E si $\forall x, y \in E, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$;
- f est décroissante sur E si $\forall x, y \in E, x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$;
- f est strictement décroissante sur E si $\forall x, y \in E, x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.

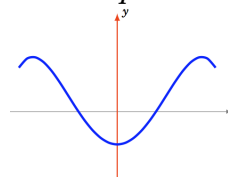


Fonction strictement croissante

2.3 Parité et périodicité

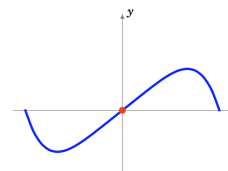
Définitions. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0 (c'est à dire de la forme $[-a, a]$ ou $] -a, a[$ ou $\mathbb{R}$) et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur cet intervalle. On dit que :

- f est paire si $\forall x \in I, f(-x) = f(x)$.



Son graphe est alors symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ;

- f est impaire si $\forall x \in I, f(-x) = -f(x)$.

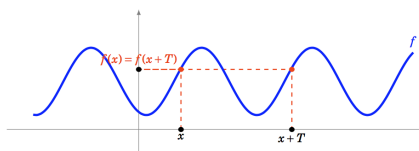


Son graphe est alors symétrique par rapport à l'origine (0,0).

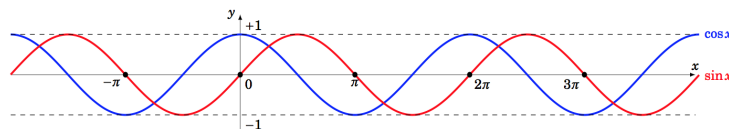
Définition Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et un réel $T > 0$. La fonction f est dite périodique de

période T si

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x).$$



Exemple. Les fonctions cosinus et sinus sont 2π -périodiques :



2.4 Composition de deux fonctions

Définition Soient E, F, G, H des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ et $f : E \rightarrow F$ et $g : G \rightarrow H$ deux fonctions. Si l'espace d'arrivée F de f est inclus dans l'espace de départ G de g alors on définit la **fonction composée** $g \circ f$ par

$$g \circ f: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & H \\ x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array} .$$

Remarques :

1. La condition $F \subset G$ est **essentielle** pour que l'image par la fonction g de $f(x)$ ait toujours un sens. De même, la condition $H \subset E$ est **essentielle** pour que l'image par la fonction f de $g(x)$ ait toujours un sens.
2. Il faut faire attention à l'ordre dans lequel on écrit les fonctions car en général les fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$ ne sont pas égales. Il existe même des cas pour lesquels $f \circ g$ existe alors que $g \circ f$ n'existe pas.

Exemples. On considère les fonctions :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1, 1] \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{array} ; \quad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array} ; \quad h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} .$$

Peut-on définir les fonctions $f \circ g, g \circ f, g \circ h$ et $h \circ f$? Si oui donnez-en la définition.

1. La fonction $g \circ f : [-1, 1]$ n'est pas inclus dans $\mathbb{R}_+$ donc $g \circ f$ n'a pas de sens.

2. La fonction $f \circ g : \text{on a } \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R} \text{ donc } f \circ g \text{ a un sens et est définie par } f \circ g :$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & [-1, 1] \\ x & \longmapsto & \sin(\sqrt{x}). \end{array}$$

3. La fonction $g \circ h : \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}_+ \text{ donc } g \circ h \text{ a un sens et est définie par } g \circ h :$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x^2}. \end{array}$$

4. La fonction $h \circ f : [-1, 1] \subset \mathbb{R} \text{ donc } h \circ f \text{ a un sens et est définie par } h \circ f :$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & (\sin(x))^2. \end{array}$$

2.5 Antécédent, image directe et image réciproque

Définitions. Soient $f : E \rightarrow F$ une fonction et B un sous-ensemble de F .

- On appelle **antécédent** de $y \in F$ par la fonction f tout élément $x \in E$ tel que $f(x) = y$. On dit alors que y est l'**image** de x par la fonction f .
- L'**image** de f est le sous-ensemble de l'espace d'arrivée F noté $\mathfrak{I}(f)$ défini par

$$\mathfrak{I}(f) = \{y \in F : \exists x \in E : y = f(x)\}.$$

- L'**image réciproque** de B par f est le sous-ensemble de l'espace de départ E noté $f^{-1}(B)$ défini par

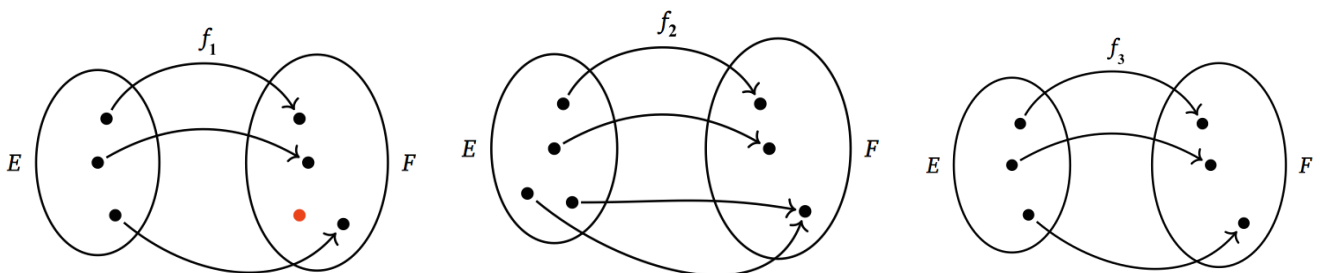
$$f^{-1}(B) = \{x \in E : f(x) \in B\}.$$

Remarque : Il ne faut pas confondre l'image de f notée $\mathfrak{I}(f)$ et l'image de x par f notée $f(x)$ car ce ne sont pas le même type d'objet. En effet, $\mathfrak{I}(f)$ est un sous-ensemble de l'espace d'arrivée F alors que $f(x)$ est un élément de F . $\mathfrak{I}(f)$ est le sous-ensemble des éléments de l'espace d'arrivée F qui ont au moins un antécédent par f .

2.6 Bijectivité et fonction réciproque

Définition Une fonction $f : E \rightarrow F$ est dite **bijective** si tout point y de l'espace d'arrivée F possède exactement un antécédent x dans l'espace de départ E par la fonction f .

Exemples. Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont bijectives et lesquelles ne le sont pas ?



.....

.....

.....

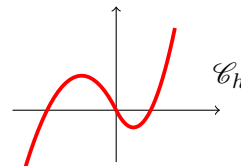
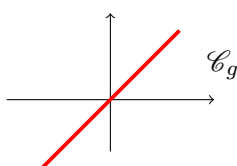
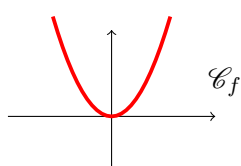
.....

.....

.....

Remarque : La définition de la bijectivité d'une fonction se traduit à l'aide de quantificateurs de la façon suivante : $\forall y \in F, \exists ! x \in E : y = f(x)$.

Exemples. Les fonctions suivantes sont-elles bijectives de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$? Si non, proposer de nouveaux espaces de départ et / ou d'arrivée pour qu'elles le soient.



.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exemples.

1. La fonction $f : \begin{matrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{matrix}$ n'est pas bijective car $1 \in \mathbb{R}_+$ admet deux antécédents -1 et 1 dans l'espace de départ $\mathbb{R}$. En effet, $f(1) = f(-1) = 1$.
2. La fonction $g : \begin{matrix} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{matrix}$ n'est pas bijective car $-1 \in \mathbb{R}$ n'admet pas d'antécédent dans l'espace de départ $\mathbb{R}_+$. En effet, il n'existe pas d'antécédent dans $\mathbb{R}_+$ pour -1 car l'équation $g(x) = -1$ qui s'écrit $x^2 = -1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
3. La fonction $h : \begin{matrix} [0, 2] & \longrightarrow & [0, 4] \\ x & \longmapsto & x^2 \end{matrix}$ est bijective car pour tout y dans l'espace d'arrivée $[0, 4]$, il existe un unique antécédent $x = \sqrt{y}$ dans l'espace de départ $[0, 2]$.
4. La fonction $k : \begin{matrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1, 1] \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{matrix}$ n'est pas bijective car $0 \in [-1, 1]$ admet au moins deux antécédents dans son espace de départ : $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$.
5. La fonction $l : \begin{matrix} [0, \pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{matrix}$ n'est pas bijective car $2 \in \mathbb{R}$ n'admet pas d'antécédent dans l'espace de départ $[0, \pi]$. En effet, l'équation $l(x) = 2$ qui s'écrit $\cos(x) = 2$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$ car pour tout x dans $\mathbb{R}$ on sait que $-1 \leq \cos(x) \leq 1$.

En pratique on utilise souvent le résultat suivant pour montrer qu'une fonction est bijective, bien souvent en dressant le tableau de variations de la fonction :

Théorème 2.1 Si une fonction $f : E \rightarrow F$ est strictement croissante et telle que $F = \mathcal{I}(f)$ alors elle est bijective.

Remarques :

. Le théorème précédent fonctionne aussi si on suppose f strictement décroissante au lieu de strictement croissante.

. Pour toute fonction $f : E \rightarrow F$, si $F = \mathcal{I}(f)$ on dit que f est à valeurs dans son image.

Exemple. La fonction $h : \begin{array}{ccc} [0, 2] & \longrightarrow & [0, 4] \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ est bijective car elle est strictement croissante et à valeurs dans son image (en effet, $\mathcal{I}(h) = h([0, 2]) = [0, 4]$).

L'intérêt principal que nous apporte le caractère bijectif d'une fonction f est qu'il nous permet de définir une nouvelle fonction appelée fonction réciproque de f .

Définition Si une fonction $f : E \rightarrow F$ est bijective alors il existe une fonction appelée « fonction réciproque » de f , notée f^{-1} et définie par

$$f^{-1} : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & E \\ y & \longmapsto & \text{l'unique } x \in E \text{ tel que } y = f(x). \end{array}$$

On remarquera que la condition « f bijective » est essentielle si l'on veut que le x tel que $y = f(x)$ soit bien défini de manière unique.

Exemples.

1. D'après l'exemple précédent, la fonction $h : \begin{array}{ccc} [0, 2] & \longrightarrow & [0, 4] \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ est bijective, elle admet donc une fonction réciproque. Pour tout y dans $[0, 4]$, l'équation $y = h(x)$ qui s'écrit $y = x^2$ admet pour unique solution $x = \sqrt{y} \in [0, 2]$. La fonction réciproque de h est définie par $h^{-1} : \begin{array}{ccc} [0, 4] & \longrightarrow & [0, 2] \\ y & \longmapsto & \sqrt{y} \end{array}$.

2. On considère la fonction $f : \begin{array}{ccc}]-\infty, 2] & \longrightarrow & \mathcal{I}(f) \\ x & \longmapsto & x^2 - 4x + 3. \end{array}$

Déterminer $\mathcal{I}(f)$, montrer que f est une bijection et calculer f^{-1} .

Pour tout x dans $]-\infty, 2]$, $f'(x) = 2x - 4 \leq 0$ et donc on obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	2
f'		$-$
f	$+\infty$	-1

D'après le tableau, f est strictement décroissante et $\mathcal{I}(f) = [-1, +\infty[$, elle est donc bijective de $]-\infty, 2]$ dans $\mathcal{I}(f)$. Soit $y \in [-1, +\infty[$, on a

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = x^2 - 4x + 3 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 4x + (3 - y) = 0. \end{aligned}$$

Le discriminant de cette équation est $\Delta = 16 - 4(3 - y) = 4 + 4y \geq 0$ car $y \geq -1$. On a donc deux solutions possibles :

$$x_1 = \frac{4 - \sqrt{4 + 4y}}{2} = 2 - \sqrt{1 + y} \leq 2$$

et

$$x_2 = \frac{4 + \sqrt{4 + 4y}}{2} = 2 + \sqrt{1 + y} \geq 2.$$

Comme on cherche la solution dans l'ensemble de définition de $] - \infty, 2]$ de f , x_2 ne convient pas, mais x_1 convient. Conclusion : $f^{-1} : \begin{matrix} [-1, +\infty[& \longrightarrow &] - \infty, 2] \\ y & \longmapsto & 2 - \sqrt{1 + y}. \end{matrix}$

Proposition 2.2 Soient $f : E \longrightarrow F$ une fonction bijjective et $f^{-1} : F \longrightarrow E$ sa réciproque. Alors

$$\forall x \in E, f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{et} \quad \forall y \in F, f(f^{-1}(y)) = y.$$

2.7 Continuité et dérivabilité d'une fonction

On note dans la suite I et J des intervalles de $\mathbb{R}$.

Définitions. Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$.

- On dit que f est continue au point a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
- On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I .
- On dit que f est **dérivable au point** a si la fonction

$$\begin{aligned} I \setminus \{a\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{aligned}$$

admet une limite finie lorsque x tend vers a . Si elle existe cette limite est notée $f'(a)$ et appelée dérivée de f en a .

- On dit que f est dérivable sur un intervalle $J \subset I$ si f est dérivable en tout point de J .
- On appelle **domaine de dérivabilité** de f l'ensemble $\tilde{I} = \{x \in I : f \text{ est dérivable en } x\}$. On note la fonction dérivée de f par $f' : \begin{matrix} \tilde{I} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{matrix}$.

Exemple. La fonction $f : \begin{matrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{matrix}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. En effet, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ on a

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = x + x_0 \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 2x_0 < \infty.$$

On a même montré que la dérivée de f en x_0 vaut $2x_0$, autrement dit $f'(x) = 2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Définition Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et f' sa dérivée. Si la fonction $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ est aussi dérivable, on note $f'' = (f')'$ la dérivée seconde de f . Plus généralement, on note

$$f^{(0)} = f, \quad f^{(1)} = f', \quad f^{(2)} = f'' \dots \text{et } f^{(n+1)} = (f^{(n)})'.$$

Si la dérivée n -ième $f^{(n)}$ existe, on dit que f est n fois dérivable.

Propriétés (Règles de dérivation)

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I . Alors, pour tout $x \in I$, on a :

- $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$;
- $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$;
- $(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$;
- $\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$, si $f(x) \neq 0$;
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$, si $g(x) \neq 0$.

Proposition (Dérivation de composée de fonctions)

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur des intervalles I et J et telles que $\mathcal{I}(f) \subset J$. Alors pour tout $x \in I$, g est dérivable en $f(x)$ et $g \circ f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable et on a pour tout $x \in I$

$$(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x)).$$

Exemples.

1. $f : x \mapsto e^{x^2+3x+1}$ f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On a $f = f_1 \circ f_2$ où $f_1 : x \mapsto e^x$ et $f_2 : x \mapsto x^2+3x+1$ sont définies et dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$f'(x) = f_2'(x) \times f_1'(f_2(x)) = (2x+3)e^{x^2+3x+1}.$$

2. $g : x \mapsto \sin(2x+1)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On a $g = g_1 \circ g_2$ où $g_1 : x \mapsto \sin(x)$ et $g_2 : x \mapsto 2x+1$ sont définies et dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$g'(x) = g_2'(x) \times g_1'(g_2(x)) = 2 \cos(2x+1).$$

Corollaire (Dérivation de la fonction réciproque)

Soient $f : I \rightarrow J$ une fonction dérivable et bijective et $f^{-1} : J \rightarrow I$ sa bijection réciproque. Si f' ne s'annule pas sur I , alors f^{-1} est dérivable et on a pour tout $y \in J$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Exemple. Nous avons vu dans un exemple précédent que la fonction $f : \begin{matrix} [0, 2] & \longrightarrow & [0, 4] \\ x & \longmapsto & x^2 \end{matrix}$ admet

pour réciproque $f^{-1} : \begin{matrix} [0, 4] & \longrightarrow & [0, 2] \\ y & \longmapsto & \sqrt{y} \end{matrix}$. Pour tout x dans $I =]0, 2[$, on a $f'(x) = 2x \neq 0$ et $f(I) =]0, 4[$.

D'après le corollaire précédent, f^{-1} est dérivable sur $]0, 4[$ et on a

$$\forall y \in]0, 4[, (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{2f^{-1}(y)} = \frac{1}{2\sqrt{y}},$$

on retrouve bien la formule de la dérivée que l'on connaît pour la fonction racine carrée.

Définition (Tangente en un point)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en un point $a \in I$. Une équation de la tangente à la courbe C_f au point $(a, f(a))$ est donnée par

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

2.8 Étude des variations d'une fonction

Proposition (Sens de variation d'une fonction)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors :

1. $\forall x \in]a, b[\quad f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f$ est croissante ;
2. $\forall x \in]a, b[\quad f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f$ est décroissante ;
3. $\forall x \in]a, b[\quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow f$ est une fonction constante ;
4. $\forall x \in]a, b[\quad f'(x) > 0 \Rightarrow f$ est strictement croissante ;
5. $\forall x \in]a, b[\quad f'(x) < 0 \Rightarrow f$ est strictement décroissante.

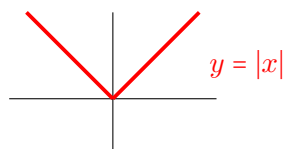
Remarque : La réciproque des points 4. et 5. est fautive. Par exemple, la fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et pourtant sa dérivée s'annule en 0.

3 Fonctions usuelles

3.1 La valeur absolue

Définition La fonction **valeur absolue** notée $|\cdot|$ est définie par :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ |\cdot| : & x \longmapsto & \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \end{array} \quad .$$



Remarque : Sur la droite numérique, $|x - y|$ représente la distance entre les réels x et y , en particulier, $|x|$ représente la distance entre les réels x et 0.

Proposition 3.1 La valeur absolue vérifie les propriétés suivantes pour tout x et tout y dans $\mathbb{R}$:

1. $|x| \geq 0$; $|-x| = |x|$ et $|x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$;
2. $\sqrt{x^2} = |x|$;
3. $|xy| = |x| \cdot |y|$;
4. $\forall r \in \mathbb{R}_+, |x| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x \leq r \Leftrightarrow x \in [-r, r]$;
5. $\forall b \in \mathbb{R}, |x| \geq b \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq b \text{ ou } x \leq -b & \text{si } b \geq 0 \\ x \in \mathbb{R} & \text{si } b < 0 \end{cases}$;
6. **L'inégalité triangulaire** : $|x + y| \leq |x| + |y|$;
7. **Seconde inégalité triangulaire** : $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Preuve. Montrons l'inégalité triangulaire : on considère x et y deux réels quelconques. On a

$$-|x| \leq x \leq |x| \text{ et } -|y| \leq y \leq |y|.$$

En additionnant ces deux inégalités, on obtient

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$$

et en utilisant le point 4), avec $r = |x| + |y| \geq 0$ on en déduit que $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Montrons maintenant la deuxième inégalité triangulaire : puisque $x = x - y + y$ en appliquant l'inégalité triangulaire on a

$$|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y| \Leftrightarrow |x| - |y| \leq |x - y|.$$

En intervertissant le rôle de x et y on a aussi $|y| - |x| \leq |y - x|$. Comme $|y - x| = |x - y|$, on a donc

$$|y| - |x| \leq |x - y| \Leftrightarrow -|x - y| \leq |x| - |y|.$$

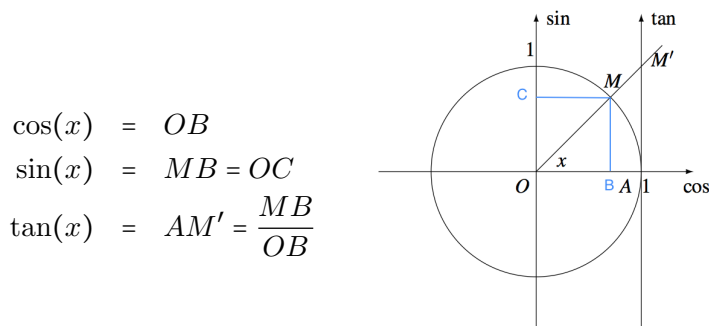
Finalement,

$$-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y|$$

et en appliquant le point 4) avec $r = |x - y| \geq 0$, on a finalement $||x| - |y|| \leq |x - y|$. ■

Remarque : Pour tout $b \in \mathbb{R}^*$, l'inéquation $|x| \leq b$ n'a pas de solution !

3.2 Fonctions trigonométriques



$$\begin{aligned}\cos(x) &= OB \\ \sin(x) &= MB = OC \\ \tan(x) &= AM' = \frac{MB}{OB}\end{aligned}$$

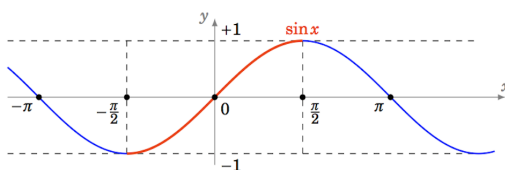
θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle OBM on a :

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Propriétés La fonction sinus $\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie les propriétés suivantes :

- $\forall x \in \mathbb{R}, \sin'(x) = \cos(x)$;
- $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(-x) = -\sin(x)$ (elle est impaire) ;
- $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ (elle est 2π -périodique) ;
- $\forall x, y \in \mathbb{R}, \sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$;
- $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(\pi - x) = \sin(x)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$;
- $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x) = \sin(y) \Leftrightarrow$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y = x + 2k\pi$ ou $y = -x + (2k + 1)\pi$;
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.



Proposition La fonction sinus $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$ est bijective.

Définition On appelle fonction **arcsinus**, notée $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, la fonction réciproque de la fonction $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$.

Remarque : Par définition, pour tout $y \in [-1, 1]$, $\arcsin(y)$ est l'unique angle compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ tel que son sinus soit égal à y . Ceci nous donne la relation suivante :

$$\boxed{\text{si } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \sin(x) = y \Leftrightarrow x = \arcsin(y).}$$

Exemple. Que vaut $\arcsin(\frac{1}{2})$?

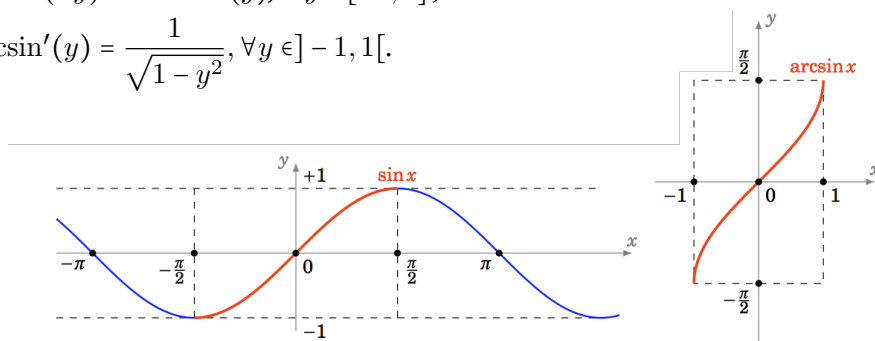
Par définition,

$$\theta = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ et } \sin(\theta) = \frac{1}{2}.$$

Par identification, $\theta = \frac{\pi}{6}$.

Propriétés La fonction arcsinus est continue et bijective de $[-1, 1]$ dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, dérivable sur $] -1, 1[$ et vérifie les propriétés suivantes :

- $\arcsin(\sin(x)) = x, \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;
- $\sin(\arcsin(y)) = y, \forall y \in [-1, 1]$;
- $\arcsin(-y) = -\arcsin(y), \forall y \in [-1, 1]$;
- $\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \forall y \in] -1, 1[$.



Exemple. Que vaut $\arcsin(\sin(\frac{13\pi}{3}))$?

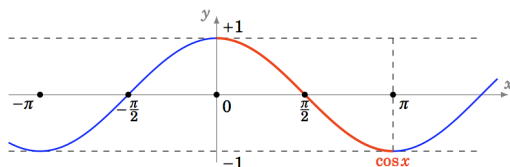
On serait tenté de répondre $\frac{13\pi}{3}$ mais ce n'est pas la bonne réponse car la fonction arcsin est à valeurs dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\frac{13\pi}{3} \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$! On a

$$\sin\left(\frac{13\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{12\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(4\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

Ainsi, $\arcsin(\sin(\frac{13\pi}{3})) = \arcsin(\sin(\frac{\pi}{3})) = \frac{\pi}{3}$ car $\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Propriétés La fonction cosinus $\cos : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie les propriétés suivantes :

- $\forall x \in \mathbb{R}, \cos'(x) = -\sin(x)$;
- $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(-x) = \cos(x)$ (elle est paire) ;
- $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ (elle est 2π -périodique) ;
- $\forall x, y \in \mathbb{R}, \cos(x - y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$;
- $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(\pi - x) = -\cos(x)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$;
- $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) = \cos(y) \Leftrightarrow$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y = x + 2k\pi$ ou $y = -x + 2k\pi$.



Proposition La fonction $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ est bijective.

Définition On appelle fonction **arccosinus**, notée $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$, la fonction réciproque de la fonction $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$.

Remarque : Par définition, pour tout $y \in [-1, 1]$, $\arccos(y)$ est l'unique angle compris 0 et π tel que son cosinus soit égal à y . Ceci nous donne la relation suivante :

$$\boxed{\text{si } x \in [0, \pi], \cos(x) = y \Leftrightarrow x = \arccos(y).}$$

Exemple. Que vaut $\arccos(\frac{1}{2})$?

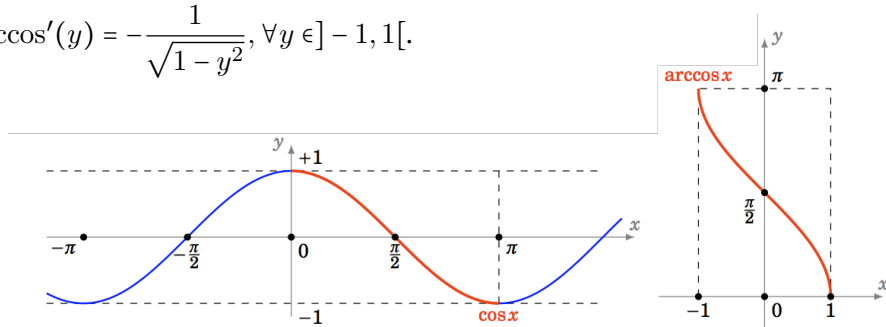
Par définition,

$$\theta = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \theta \in [0, \pi] \text{ et } \cos(\theta) = \frac{1}{2}.$$

Par identification, $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Propriétés La fonction arccosinus est continue et bijective de $[-1, 1]$ dans $[0, \pi]$, dérivable sur $] -1, 1[$ et vérifie les propriétés suivantes :

- $\arccos(\cos(x)) = x, \forall x \in [0, \pi];$
- $\cos(\arccos(y)) = y, \forall y \in [-1, 1];$
- $\arccos'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \forall y \in]-1, 1[.$



Exemple. Que vaut $\arccos(\cos(\frac{13\pi}{3}))$?

On serait tenté de répondre $\frac{13\pi}{3}$ mais ce n'est pas la bonne réponse car la fonction arccos est à valeurs dans $[0, \pi]$! On a

$$\cos\left(\frac{13\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{12\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos(4\pi + \frac{\pi}{3}) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

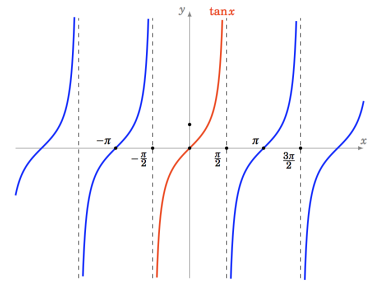
Ainsi, $\arccos(\cos(\frac{13\pi}{3})) = \arccos(\cos(\frac{\pi}{3})) = \frac{\pi}{3}$ car $\frac{\pi}{3} \in [0, \pi]$.

Définition La fonction tangente $\tan : D_{\tan} \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ avec

$$D_{\tan} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

est continue et dérivable sur $D_{\tan}$ et vérifie les propriétés suivantes :

- $\forall x \in D_{\tan}, \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$;
- $\forall x, -x \in D_{\tan}, \tan(-x) = -\tan(x)$ (elle est impaire) ;
- $\forall x \in D_{\tan}, \tan(x + \pi) = \tan(x)$ (elle est π -périodique).



Proposition La fonction tangente $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ est bijective.

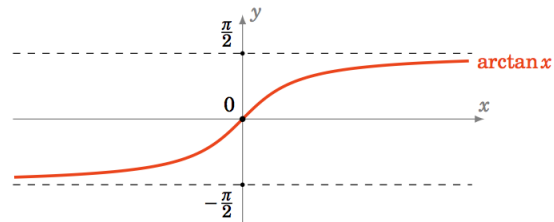
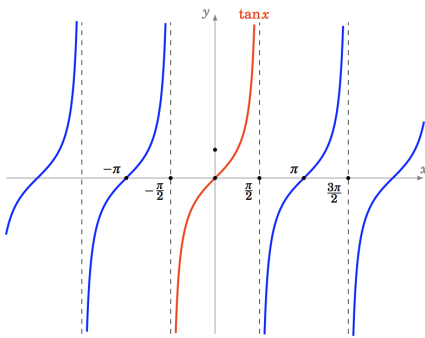
Définition On appelle fonction **arctangente**, notée $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, la fonction réciproque de la fonction $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$.

Remarque : Par définition, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\arctan(y)$ est l'unique angle compris (strictement) entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ tel que sa tangente soit égale à y . Ceci nous donne la relation suivante :

$$\boxed{\text{si } x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \tan(x) = y \Leftrightarrow x = \arctan(y).}$$

Propriétés La fonction arctangente est continue, bijective et dérivable de $\mathbb{R}$ dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et vérifie :

- $\arctan(\tan(x)) = x, \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$;
- $\tan(\arctan(y)) = y, \forall y \in \mathbb{R}$;
- $\arctan(-y) = -\arctan(y), \forall y \in \mathbb{R}$;
- $\arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}, \forall y \in \mathbb{R}$.



Exemple : En posant $t = \tan(\frac{x}{2})$ montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{y \in \mathbb{R} : y = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Considérons $x \in]-\pi, \pi[$ et posons $t = \tan(\frac{x}{2})$. Comme $\frac{x}{2} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on a

$$\arctan(t) = \arctan(\tan(\frac{x}{2})) = \frac{x}{2}.$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned}
 \cos(x) &= \cos(2 \arctan(t)) \\
 &= 2 \cos^2(\arctan(t)) - 1 \\
 &= \frac{2}{1 + \tan^2(\arctan(t))} - 1 \quad \text{car } 1 + \tan^2(X) = \frac{1}{\cos^2(X)}, \forall X \in D_{\tan} \\
 &= \frac{2}{1 + t^2} - 1 \\
 &= \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.
 \end{aligned}$$

Maintenant, si $x \in]-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi[$, avec $k \in \mathbb{Z}$ alors

$$\cos(x) = \cos(x - 2k\pi) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \text{ où } t = \tan\left(\frac{x - 2k\pi}{2}\right) \text{ car } x - 2k\pi \in]-\pi, \pi[.$$

Or $\tan\left(\frac{x - 2k\pi}{2}\right) = \tan\left(\frac{x}{2} - k\pi\right) = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ car la fonction $\tan$ est π -périodique. On a donc bien $\cos(x) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$ avec $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

3.3 Fonction polynomiale

Définition Soient $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ et $a_n \in \mathbb{R}^*$. Alors la fonction

$$\begin{aligned}
 P : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\
 x &\mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n,
 \end{aligned}$$

est appelée fonction polynôme de degré n . Elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n - 1$ donné par

$$\begin{aligned}
 P' : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\
 x &\mapsto \sum_{k=1}^n k \times a_k x^{k-1} = a_1 + 2a_2 x + \dots + n \times a_n x^{n-1}.
 \end{aligned}$$

Remarque : La dérivée de $P : x \mapsto x^k$ est donc $P' : x \mapsto k \times x^{k-1}$.

Définition Soit $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un polynôme de degré n . On dit que $\alpha \in \mathbb{R}$ est une **racine** ou un **zéro** de P si $P(\alpha) = 0$.

Exemple. Le polynôme P défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $P(x) = x^2 + x - 2$ admet-il des racines ? On calcule le discriminant $\Delta = 9$ et on trouve deux racines $x_1 = 1$ et $x_2 = -2$.

Proposition 3.2 Soit $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un polynôme de degré n . Alors :

- P possède au plus n racines ;
- α est une racine de $P \Leftrightarrow$ Pour tout x dans $\mathbb{R}$, $P(x)$ se factorise par $(x - \alpha)$.

Remarque : Lorsque $n = 2$, si $P(x) = ax^2 + bx + c$ admet deux racines x_1 et x_2 alors une factorisation de P est $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Exemple. 1 et -2 sont racines du polynôme P défini pour tout x dans $\mathbb{R}$ par $P(x) = x^2 + x - 2$, ainsi $P(x)$ se factorise par $(x - 1)$ et $(x + 2)$ de la façon suivante $P(x) = (x - 1)(x + 2)$.

3.4 Fonction logarithme

Définition On appelle *logarithme népérien* l'unique fonction $\ln: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, vérifiant $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\ln(1) = 0$.

Propriétés (Règles de calcul)

Pour tout $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $n \in \mathbb{Z}$ on a

$$\begin{aligned}\ln(ab) &= \ln(a) + \ln(b) ; \\ \ln\left(\frac{a}{b}\right) &= \ln(a) - \ln(b) ; \\ \ln(a^n) &= n \ln(a) ; \\ \ln\left(\frac{1}{a}\right) &= -\ln(a) ; \\ \ln\left(\frac{1}{a^n}\right) &= -n \ln(a).\end{aligned}$$

Proposition (Limites usuelles)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) &= -\infty ; \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) &= +\infty ; \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} &= 1.\end{aligned}$$

Théorème La fonction logarithme est une bijection continue, dérivable et strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.

3.5 Fonction exponentielle

Définition La fonction exponentielle notée $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est définie comme la réciproque de la fonction logarithme $\ln: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$. Elle vérifie $\forall x \in \mathbb{R} \ (\exp(x))' = \exp(x)$.

Remarque : On utilisera la notation $\exp(x) = e^x$. Comme elle est la réciproque de la fonction logarithme, on en déduit que la fonction exponentielle vérifie

$$\forall x > 0, e^{\ln x} = x \text{ et } \forall y \in \mathbb{R}, \ln(e^y) = y.$$

Propriétés (Règles de calcul)

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}e^0 &= 1 ; \\ e^{x+y} &= e^x \cdot e^y ; \\ e^{-x} &= \frac{1}{e^x} ; \\ e^{nx} &= (e^x)^n ; \\ e^{-nx} = (e^x)^{-n} &= \frac{1}{(e^x)^n} = \frac{1}{e^{nx}}.\end{aligned}$$

Proposition (Limites usuelles)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x &= 0 ; \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x &= +\infty.\end{aligned}$$

Théorème La fonction exponentielle est une bijection continue, dérivable et strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

Définition Soit $a > 0$. On définit la fonction **exponentielle de base a** de la manière suivante

$$\begin{aligned} \exp_a : \mathbb{R} &\longrightarrow]0, +\infty[\\ x &\longmapsto a^x = e^{x \ln a} \end{aligned}$$

3.6 Fonctions puissances et leurs réciproques

Définition Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction

$$\begin{aligned} u_\alpha :]0, +\infty[&\longrightarrow]0, +\infty[\\ x &\longmapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)} \end{aligned}$$

s'appelle **fonction puissance**. Elle admet pour dérivée la fonction $u'_\alpha :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $u'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ pour tout $x > 0$.

Proposition La fonction puissance $u_\alpha :]0, +\infty[\longrightarrow]0, +\infty[$ est une bijection continue strictement croissante si $\alpha > 0$ et strictement décroissante si $\alpha < 0$. Elle admet pour réciproque la fonction

$$\begin{aligned} u_\alpha^{-1} :]0, +\infty[&\longrightarrow]0, +\infty[\\ x &\longmapsto x^{\frac{1}{\alpha}} \end{aligned}$$

Corollaire Lorsque $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$, la réciproque de la fonction $x \mapsto x^n$ est la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$, appelée **racine n -ième**. Lorsque n est pair, elle est définie de $[0, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$, et lorsque n est impair, elle est définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

4 Techniques de calcul de limites

Il existe des cas où l'on ne peut rien dire sur les limites que l'on appelle formes indéterminées :

$$\llcorner +\infty - \infty \llcorner, \llcorner 0 \times \infty \llcorner, \llcorner \frac{\infty}{\infty} \llcorner, \llcorner \frac{0}{0} \llcorner, \llcorner 1^\infty \llcorner \text{ et } \llcorner \infty^0 \llcorner.$$

Nous allons voir dans cette section plusieurs techniques pour lever ces indéterminations.

4.1 Fractions rationnelles

Règle n°1 : La limite en $+\infty$ ou $-\infty$ d'une fraction rationnelle est égale à la limite du quotient des termes de plus hauts degrés respectifs du numérateur et du dénominateur. On a 3 cas possibles :

1. le degré du numérateur est plus élevé que celui du dénominateur :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + 3x^3 - 5}{x^3 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty ;$$

2. le degré du numérateur est égal à celui du dénominateur :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4 + 3x^3 - 5}{5x^4 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4}{5x^4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{5} = \frac{3}{5} ;$$

3. le degré du dénominateur est plus élevé que celui du numérateur :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 + 2x + 1}{x^3 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} = 0.$$

Règle n°2 : La limite en 0 d'une fraction rationnelle est égale à la limite du quotient des termes de plus bas degrés respectifs du numérateur et du dénominateur :

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 3x^3 - 5}{x^3 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-5}{1} = -5$;
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^4 + 3x^3}{5x^4 + 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{2}x^2 = 0$;
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2 + 2x}{x^3 + 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$;
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2 + 2x}{x^3 + 3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{3x} = +\infty$;
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^2 + 2x}{x^3 + 3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2}{3x} = -\infty$.

Rappel : La notation « $x \rightarrow 0^+$ » signifie que x tend vers 0 par valeur supérieure, c'est à dire x tend vers 0 et $x > 0$. De façon analogue, la notation « $x \rightarrow 0^-$ » signifie que x tend vers 0 par valeur inférieure, c'est à dire x tend vers 0 et $x < 0$.

4.2 Limite de fonctions composées

- On veut calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{5x+1}{x^2+3x}}$. On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{5x+1}{x^2+3x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{3x} = +\infty$. Comme $\lim_{y \rightarrow +\infty} \sqrt{y} = +\infty$, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{5x+1}{x^2+3x}} = +\infty$.
- On veut calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(\frac{-3x^4+2x+1}{5x^3+x^2}\right)$. On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^4+2x+1}{5x^3+x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^4}{5x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x}{5} = +\infty$. Comme $\lim_{y \rightarrow +\infty} \ln(y) = +\infty$, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(\frac{-3x^4+2x+1}{5x^3+x^2}\right) = +\infty$.

4.3 Astuces récurrentes

Ici sont listés des exemples d'astuces pour lever des indéterminations du type « $\frac{0}{0}$ » et « $\infty - \infty$ ».

- On veut calculer $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{3x^2 - 7x + 4}$. On a là une forme indéterminée du type « $\frac{0}{0}$ ». Comme 1 annule $2x^2 - x - 1$, alors on peut factoriser $2x^2 - x - 1$ par $x - 1$ et de la même façon $3x^2 - 7x + 4$ se factorise par $x - 1$. Après division euclidienne on trouve

$$2x^2 - x - 1 = (x - 1)(2x + 1) \text{ et } 3x^2 - 7x + 4 = (x - 1)(3x - 4)$$

$$\text{et alors } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{3x^2 - 7x + 4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(2x + 1)}{(x - 1)(3x - 4)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + 1}{3x - 4} = \frac{3}{-1} = -3.$$

- On veut calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{x}$. On a là une forme indéterminée du type « $\frac{0}{0}$ ». On voit que 0 annule le dénominateur et le numérateur, on voudrait factoriser par $x - 0$ mais à ce stade on ne peut pas. En présence d'une différence de racines $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ le réflexe à avoir est de

multiplier et diviser notre expression par la quantité conjuguée $\sqrt{a} + \sqrt{b}$:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1+x^2})}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1+x^2})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x})^2 - (\sqrt{1+x^2})^2}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1+x^2})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x) - (1+x^2)}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1+x^2})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x^2}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1+x^2})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-x}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1+x^2}} \\
 &= \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

3. On veut calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x+1} - \sqrt{2x-1}$. On a là une forme indéterminée du type « $+\infty - \infty$ ».

On a

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x+1} - \sqrt{2x-1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{2x+1} - \sqrt{2x-1})(\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x-1})}{(\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x-1})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{2x+1})^2 - (\sqrt{2x-1})^2}{(\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x-1})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{(\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x-1})} \\
 &= 0^+.
 \end{aligned}$$

4.4 Théorème des gendarmes

Théorème Soient $x_0, \ell \in \mathbb{R}$ et f, g, h trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telles que $f \leq g \leq h$.

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \ell \text{ alors } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell.$$

Corollaire Soient $x_0, \ell \in \mathbb{R}$ et f, g deux fonctions définies sur $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ telles que $f \leq g$.

1. Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$.
2. Si $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.

Remarque : Les deux résultats précédents s'appliquent aussi pour la recherche d'une limite en $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemple. Calculer la limite en $+\infty$ de f :
$$\begin{array}{ccc}
]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 x & \longmapsto & \frac{\sin(x)}{x}
 \end{array}$$
 Pour tout $x > 0$ on a

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{x} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{x}.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, on en déduit d'après le théorème des gendarmes que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

4.5 Croissances comparées

Proposition 4.1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0^+ \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$

Preuve. En étudiant les variations de la fonction $x \mapsto \ln(x) - x + 1$ sur $]0, +\infty[$, on montre que pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leq x - 1$, et donc $\ln(x) \leq x$. En particulier on obtient $\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \leq 1$ pour tout $x > 0$. Si $x \geq 1$ on a

$$0 \leq \frac{\ln(x)}{x} = \frac{2 \ln(\sqrt{x})}{x} = \frac{2 \ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

En utilisant cet encadrement, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0^+$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x)}{e^x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y)}{y} = 0^+,$$

on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$. ■

Proposition 4.2 Si $b > 0$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^b} = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^b \ln(x) = 0$.

Preuve. Pour tout $x > 0$, on a $\frac{\ln(x)}{x^b} = \frac{1}{b} \frac{\ln(x^b)}{x^b}$. Comme $b > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^b = +\infty$, ainsi en utilisant la proposition précédente, on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^b} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{b} \frac{\ln(x^b)}{x^b} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{b} \frac{\ln(y)}{y} = 0.$$

Pour tout $x > 0$, on a $\frac{1}{x^b} = \left(\frac{1}{x}\right)^b$, donc $x^b \ln(x) = \frac{\ln(x)}{(1/x)^b} = -\frac{\ln(1/x)}{(1/x)^b}$. On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1/x = +\infty$ et $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y)}{y^b} = 0^+$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^b \ln(x) = 0$. ■

4.6 Règle de l'Hospital

Nous introduisons ci-dessous une technique qui permet de lever les indéterminations du type « $\frac{0}{0}$ ». Attention, avant d'utiliser la méthode qui suit, on commence par vérifier si on ne peut pas simplifier l'expression de la fraction, en factorisant par exemple numérateur et dénominateur par la même quantité !

Proposition 4.3 (Règle de l'Hospital)

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur un intervalle I et $x_0 \in I$. On suppose que :

- $f(x_0) = g(x_0) = 0$;
- $\forall x \in I \setminus \{x_0\}, g'(x) \neq 0$.

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}} \text{ alors } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

Remarque : Ce résultat s'applique également pour lever des indéterminations du type « $\frac{\infty}{\infty}$ », c'est à dire lorsque $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$.

Exemple. Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x^2 + x - 1)}{\ln(x)}$. On a :

- $I =]\frac{3}{4}, 2[$;
- $f(x) = \ln(x^2 + x - 1)$ est dérivable sur I , $f(1) = 0$ et $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x-1}$;
- $g(x) = \ln(x)$ est dérivable sur I , $g(1) = 0$ et $g'(x) = \frac{1}{x}$;
- $\forall x \in I \setminus \{1\}, g'(x) \neq 0$.

De plus

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x+1}{x^2+x-1} \times x = \frac{2x^2+x}{x^2+x-1} \xrightarrow{x \rightarrow 1} 3.$$

Donc $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 1} 3$.

5 Théorèmes fondamentaux

Nous présentons ici des résultats fondamentaux liés à la continuité et la dérivabilité d'une fonction.

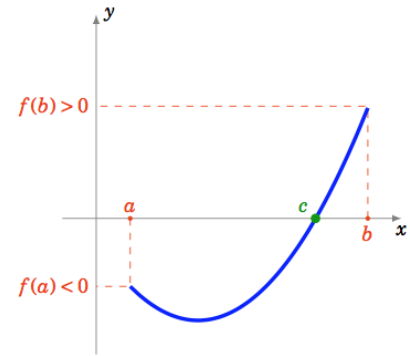
Théorème 5.1 (Théorème des valeurs intermédiaires)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.

Exemple. La fonction cosinus $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ est continue. D'après le théorème, pour tout y compris entre $\cos(0) = 1$ et $\cos(\pi) = -1$, il existe c dans $[0, \pi]$ tel que $\cos(c) = y$. Cela signifie que tout élément de $[-1, 1]$ admet au moins un antécédent dans $[0, \pi]$ par la fonction cosinus.

Corollaire 5.1 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Si $f(a) \times f(b) < 0$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.



Exemple. Montrer que l'équation $x^3 + 5x + 2 = 0$ admet au moins une solution dans $[-2, 2]$.
La fonction $f : x \mapsto x^3 + 5x + 2 = 0$ est continue sur l'intervalle fermé $[-2, 2]$. De plus $f(0) = 2 > 0$ et $f(-1) = -4 < 0$, alors $f(0) \times f(-1) < 0$ et d'après le TVI il existe $c \in]-1, 0[$ tel que $f(c) = 0$. Comme $]-1, 0[\subset [-2, 2]$, l'équation $x^3 + 5x + 2 = 0$ admet bien au moins une solution c dans $[-2, 2]$.

Théorème 5.2 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0 .
- Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I .

Remarques :

1. Attention, la réciproque de ce théorème est fautive : si une fonction est continue en un point, elle peut ne pas être dérivable en ce point. Par exemple la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$$

est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

En effet, le taux d'accroissement en 0 vérifie :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \begin{cases} \frac{-x}{x} = -1 & \text{si } x < 0. \\ \frac{x}{x} = 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$, les limites à droite et à gauche de 0 étant différentes, il n'y a pas de limite en 0. Ainsi, f n'est pas dérivable en $x = 0$.

2. En pratique on utilise la contraposée de ce théorème qui s'énonce comme suit : « Si une fonction n'est pas continue en un point alors elle n'est pas dérivable en ce point. »

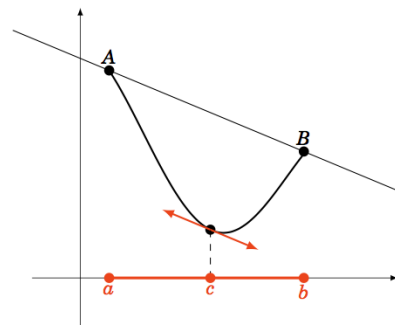
Théorème 5.3 (Théorème des accroissements finis)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Remarque : Géométriquement, ce théorème assure qu'il existe au moins un point du graphe de f où la tangente est parallèle à la droite passant par les points $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$.



Exemple. Montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}_+$, $e^x \geq x + 1$. Pour $x = 0$ l'inégalité est trivialement vérifiée. Fixons x dans $\mathbb{R}_+^*$. La fonction exponentielle est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$ donc d'après le théorème des accroissements finis, il existe c_x dans $]0, x[$ tel que

$$e^x - e^0 = e^{c_x}(x - 0).$$

Or par croissance de la fonction exponentielle, comme $c_x > 0$ on obtient $e^{c_x} > e^0$ et donc

$$e^x - e^0 \geq e^0(x - 0),$$

ce qui donne bien $e^x \geq x + 1$.

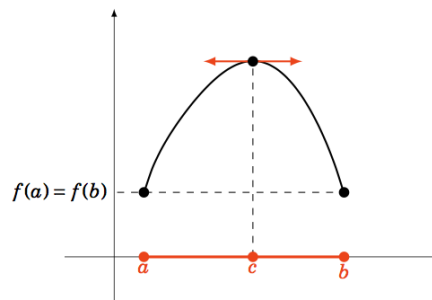
Le théorème suivant est un cas particulier du théorème des accroissements finis.

Théorème 5.4 (Théorème de Rolle)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que

- f est continue sur $[a, b]$;
- f est dérivable sur $]a, b[$;
- $f(a) = f(b)$.

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.



Remarque : Géométriquement, le théorème de Rolle assure qu'il existe au moins un point du graphe de f où la tangente est horizontale.

A Formulaire

FONCTIONS USUELLES

Fonction	Domaine de définition	Image	Fonction dérivée	Domaine de dérivabilité
$x^n, n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt[n]{x}, n = 2k, k \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+$	$\frac{1}{nx^{1-1/n}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\sqrt[n]{x}, n = 2k+1, k \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{nx^{1-1/n}}$	$\mathbb{R}^*$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et $\alpha \neq \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
e^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+^*$	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$\mathbb{R}$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\arcsin(x)$	$[-1, 1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$] -1, 1[$
$\arccos(x)$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$] -1, 1[$
$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$

DÉRIVÉES DE COMPOSÉES USUELLES

On considère une fonction $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue et dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

Fonction	Domaine de définition	Fonction dérivée	Domaine de dérivabilité
$u^n, n \in \mathbb{N}^*$	I	$nu'u^{n-1}$	I
$\frac{1}{u^n}, n \in \mathbb{N}^*$	$I \cap \{x \in I : u(x) \neq 0\}$	$\frac{-nu'}{u^{n+1}}$	$I \cap \{x \in I : u(x) \neq 0\}$
$\frac{1}{u}$	$I \cap \{x \in I : u(x) \neq 0\}$	$-\frac{u'}{u^2}$	$I \cap \{x \in I : u(x) \neq 0\}$
$\sqrt{u}$	$I \cap \{x \in I : u(x) \geq 0\}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$I \cap \{x \in I : u(x) > 0\}$
e^u	$\mathbf{I}$	$u'e^u$	$\mathbf{I}$
$\ln(u)$	$I \cap \{x \in I : u(x) > 0\}$	$\frac{u'}{u}$	$I \cap \{x \in I : u(x) > 0\}$
$\cos(u)$	$\mathbf{I}$	$-u'\sin(u)$	$\mathbf{I}$
$\sin(u)$	$\mathbf{I}$	$u'\cos(u)$	$\mathbf{I}$
$\tan(u)$	$I \cap \{x \in I : u(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$u'(1 + \tan^2(u)) = \frac{u'}{\cos^2(u)}$	$I \cap \{x \in I : u(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
$\arcsin(u)$	$I \cap \{x \in I : u(x) \in [-1, 1]\}$	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$I \cap \{x \in I : u(x) \in]-1, 1[\}$
$\arccos(u)$	$I \cap \{x \in I : u(x) \in [-1, 1]\}$	$-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$I \cap \{x \in I : u(x) \in]-1, 1[\}$
$\arctan(u)$	I	$\frac{u'}{1+u^2}$	I

B Exercices

Exercice 1. Résoudre les équations et inéquations suivantes :

- $\sqrt{7x-1} = \sqrt{x+7}$;
- $\sqrt{x+21} \leq \sqrt{2x+3}$;
- $\sqrt{2x+1} = x-1$;
- $\sqrt{x^2-8} - 2x = -5$;
- $\sqrt{x(10-x)} = \sqrt{-3-x}$;
- $\frac{2x+1}{x+2} \geq 0$;
- $\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+1} = \frac{1}{x}$;
- $\frac{2}{x^2-1} - \frac{2}{x^2+1} = \frac{4}{x^2-1}$;
- $-x+3 < x+1 < -3x+7$;
- $|x+2| = \frac{4}{3}$;
- $\left| \frac{3}{2} - x \right| = 3$;
- $|x-2| = 2-x$;
- $|x+1| = 3-2x$;
- $|5-4x| = 3x-2$.

Exercice 2. On considère les fonctions

$$f_1: \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3x+1 \end{matrix} ; \quad f_2: \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & [-1, +\infty[\\ x & \mapsto & x^2-1 \end{matrix} ; \quad f_3: \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & [0, 1[\\ x & \mapsto & \frac{x^2}{1+x^2} \end{matrix} ;$$

$$f_4: \begin{matrix}]-1, 1[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan\left(\frac{2x}{\pi}\right) - 1 \end{matrix} ; \quad f_5: \begin{matrix} [0, \frac{1}{2}[& \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \ln(1-2x) \end{matrix} .$$

Parmi les fonctions ci-dessus, déterminer celles qui peuvent être composées ; et lorsqu'elles le peuvent, calculer leur composition.

Exercice 3.

1. Pour tout x dans $\mathbb{R}$, donner trois formules pour $\cos(2x)$ et une formule pour $\sin(2x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
2. Montrer, pour certaines valeurs de x qui seront précisées, que $1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$.
3. Donner une expression de $\tan(x+y)$ et $\tan(x-y)$ en fonction de $\tan(x)$ et $\tan(y)$ en précisant les valeurs de x et y qui conviennent.
4. Pour tout x qui convient, donner une formule pour $\tan(2x)$ en fonction de $\tan(x)$.

Exercice 4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- $\cos\left(2x - \frac{5\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$;
- $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$;
- $\sin\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right) = \cos(x)$;
- $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$;
- $\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
- $\sin(x^2) = \sin(2x)$.

Exercice 5. Calculer

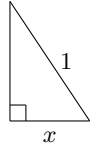
- $\sin\left(\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right)$;
- $\arcsin\left(\sin\left(\frac{14\pi}{3}\right)\right)$;
- $\cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{5}\right)\right)$;
- $\cos\left(\arccos\left(-\frac{e}{3}\right)\right)$;
- $\arccos\left(\cos\left(\frac{-13\pi}{3}\right)\right)$;
- $\arccos\left(\sin\left(\frac{18\pi}{5}\right)\right)$.

Exercice 6.

1. En dérivant le terme de gauche, montrer que, pour tout $x \in [-1, 1]$, on a

$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}.$$

2. Redémontrer le résultat de manière géométrique en séparant en cinq cas : $x = -1, 0, 1, x \in]0, 1[$ puis $x \in]-1, 0[$ et en considérant, pour $x \in]0, 1[$, le triangle rectangle suivant :



Exercice 7. Donner les domaines maximaux de définition dans $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes :

- $f_1(x) = \sqrt{x-4}\sqrt{x+6}$;
- $f_2(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{|x|-3}$;
- $f_3(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$;
- $f_4(x) = \sqrt{x-x^2}$;
- $f_5(x) = \frac{2x}{x^2-4} - \frac{2}{x^2-2x}$;
- $f_6(x) = \ln(2x-1-x^2)$;
- $f_7(x) = \ln(\sqrt{x})$;
- $f_8(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$;
- $f_9(x) = \frac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3}$;
- $f_{10}(x) = \frac{1}{\cos(x)}$;
- $f_{11}(x) = \sqrt{x \sin(1-x^2)}$;
- $f_{12}(x) = \frac{\cos(x) + \cos^2(x)}{x + \sin(x)}$;
- $f_{13}(x) = e^{\cos(x)} \cdot \ln\left(\frac{\sqrt{\arctan(2-x)}}{x^2+x-3}\right)$.

Exercice 8. Donner le domaine maximal de définition et de dérivabilité des fonctions suivantes et calculer leurs dérivées :

- $f_1(x) = \frac{x^3+2x+3}{x^2+2x+7}$;
- $f_2(x) = \frac{1}{x} \ln\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)$;
- $f_3(x) = \tan(2x+9)$;
- $f_4(x) = \ln(1+x^2)$;
- $f_5(x) = \sqrt{e^x-1}$;
- $f_6(x) = \arcsin(3x+9)$;
- $f_7(x) = \frac{1}{x} \arccos(2x+1)$;
- $f_8(x) = \sqrt{x^2+2x-1} \arctan\left(\frac{x}{x-1}\right)$;
- $f_9(x) = \exp\left(\sqrt{\frac{2-x}{3x+1}}\right)$;
- $f_{10}(x) = \ln\left(\frac{x^2+x-1}{-3x+5}\right)$;
- $f_{11}(x) = \ln(\arctan(3x+1))$;
- $f_{12}(x) = \frac{2x^2+x-1}{\sqrt{\ln(x)}}$;
- $f_{13}(x) = \ln(3-x^2-2x) + \arctan(\sqrt{3-x})$;
- $f_{14}(x) = \arcsin\left(\frac{x}{x+1}\right)$;
- $f_{15}(x) = \arccos\left(\frac{x}{x+1}\right)$;
- $f_{16}(x) = \arccos(\sin(x))$.

Exercice 9. Déterminer l'ensemble de définition puis étudier la parité des fonctions suivantes :

- $f_1(x) = e^{-x} + e^x$;
- $f_2(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$;
- $f_3(x) = e^{\frac{x-1}{x}}$;
- $f_4(x) = |x+1| + |x-1|$;
- $f_5(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

Exercice 10. Etudier les fonctions

$$f_1(x) = 2x\sqrt{1-x^2}, \quad f_2(x) = |\tan(x)| + \cos(x), \quad f_3(x) = \frac{1+x^2}{x^3} \left(\arctan(x) - \frac{x}{1+x^2} \right),$$

c'est-à-dire, pour chacune, déterminer

1. son domaine maximale de définition ;
2. sa parité ;
3. son tableau de variation ;
4. sa tangente en $x = 0$;
5. ses tangentes horizontales ;
6. son graphe.

Exercice 11. Dans chacun des cas suivants, faite le tableau de variation, vérifier que la fonction réalise une bijection de I sur son image, et déterminer sa fonction réciproque :

- $f_1(x) = e^{x+1}$ et $I = \mathbb{R}$;
- $f_2(x) = x^2 - 1$ et $I = [1, +\infty[$;
- $f_3(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ et $I =]-\infty, 0]$;
- $f_4(x) = x^2 + x - 2$ et $I = [1, +\infty[$;
- $f_5(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ et $I =]-2, +\infty[$;
- $f_6(x) = \frac{x+1}{x+4}$ et $I =]-4, +\infty[$;
- $f_7(x) = \sqrt{2x+3} - 1$ et $I = [-\frac{3}{2}, +\infty[$;
- $f_8(x) = \sqrt[3]{x+1} + 1$ et $I = \mathbb{R}$;
- $f_9(x) = \ln(1+x^2+x^4)$ et $I = \mathbb{R}_+$.

Exercice 12. Calculer les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}}$;
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}}$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - x + 3}{2x^2 + 3x - 1}$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+3} - \sqrt{x-5}$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x$;
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x}$;
- $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2}{x^2 - 3x + 2} - \frac{3}{x - 2}$;
- $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x} - 2}$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^{\frac{1}{x}} - 1)(x^3 + 1)}{x^2 + 1}$;
- $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2(x)}{1 + \cos(x)}$.

Exercice 13. Calculer les limites en 0 , $+\infty$ et $-\infty$ des fonctions suivantes :

$$\bullet f_1(x) = \frac{x^2 - 3x - 1}{5x - 2} ; \quad \bullet f_2(x) = \frac{-3x^4 + 5x^3}{x^4 + x^2} ; \quad \bullet f_3(x) = \frac{2x^2}{3x - 1} - x + 1.$$

Exercice 14. Appliquer la règle de l'Hospital pour calculer les limites des fonctions suivantes lorsque x tend vers 0 :

$$\bullet f_1 : x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{\sin(x)}; \bullet f_2 : x \mapsto \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}; \bullet f_3 : x \mapsto \frac{1-\cos(x)}{\tan(x)}; \bullet f_4 : x \mapsto \frac{x-\sin(x)}{x^3}.$$

Exercice 15. On considère la fonction $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que f est continue sur $[-1, 1]$.

Exercice 16. Étudier la continuité de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Exercice 17. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-8}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ \alpha & \text{si } x = 2. \end{cases}$$

Pour quelle valeur de α la fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 18. Déterminer un réel a tel que la fonction suivante soit continue sur $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} + 1 & \text{si } x < 0, \\ a & \text{si } x = 0, \\ 2 + x \ln(x) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Avec la valeur a trouvée, la fonction est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 19. Montrer que les équations suivantes ont des solutions dans l'intervalle I donné :

- $x^7 - x^2 + 1 = 0$ et $I = [-2, 0]$;
- $\cos(2x) = 2 \sin(x) - 2$ et $I = \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$;
- $\sqrt{x^3 + 6x + 1} = 2$ et $I = [0, +\infty[$.

Exercice 20. Montrer que les équations suivantes ont des solutions dans $\mathbb{R}$:

- $x^2 + \ln(x) = 0$;
- $\sin(x) + 2 \cos(x) = \frac{3}{2}$;
- $x^{17} = 1 - x^{11}$;
- $x^3 + x - \frac{1}{x} = 0$.

Exercice 21. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer les résultats suivants :

- pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin(x) \leq x$;
- pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $1 - x^2 \leq \cos(x) \leq 1$.