Partiel 2
02.12.2019

Exercice 1. (2 Pts.)
Donner la formule de Taylor-Young du DL d'ordre n en 0 d'une fonction n-fois dérivable sur un voisinage de 0.

Exercice 2. (2+2+2 Pts.)

a) Calculer le DL d'ordre 3 en 0 de la fonction $f(x) = \ln(1-x)\sqrt{1+x}$.

b) Montrer que le DL d'ordre 3 en 0 de la fonction $g(x) = \arctan(x)$ est donné par $x - \frac{1}{3}x^3$.

c) Utiliser b) pour calculer le DL d'ordre 3 en 0 de la fonction $h(x) = \arctan(\sin x)$.

Exercice 3. (2 Pts.) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ln(x)}, & x > 0 \\ c, & x = 0 \\ e^{\frac{1}{x}}, & x < 0. \end{cases}$$

Est-ce qu'il existe une valeur de c pour laquelle la fonction f est continue partout ?

Exercice 4. (2+2 Pts.)

a) Soit g une fonction dérivable à valeurs réelles définie sur un intervalle ouvert. Donner la définition de la dérivée de g au point a de son domaine de définition.

b) Soit la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \\ \cos x, & x < 0. \end{cases}$$

Est-ce que g est dérivable en 0 ? Si oui donner $g'(0)$.

Exercice 5. (2 Pts.) Trouver une primitive de la fonction

$$h(x) = \frac{2x\cos(x^2)}{2+\sin(x^2)}.$$

Tourner s.v.p.

Exercice 6. (2 Pts.) Trouver une primitive de la fonction $k(x) = x\ln(x)$.

Exercice 7. (2 Pts.) Calculer

$$\int_1^2 \frac{x-1}{x^2+x}.$$

Indication : Ecrire $\frac{x-1}{x^2+x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$ avec $A, B \in \mathbb{R}$ convenable.

.

Quelques DL utiles :

$e^x \;=\; 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$

$\ln(1+x) \;=\; x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$

$\frac{1}{1-x} \;=\; 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o(x^n)$

$(1+x)^\alpha \;=\; 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n),\ \alpha \in \mathbb{R}$

$\sin(x) \;=\; x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^n)$

$\cos(x) \;=\; 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^n)$