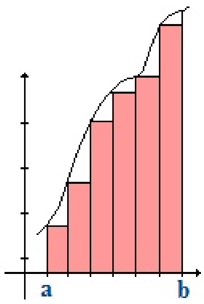
Chapitre 4 : Intégrales et primitives

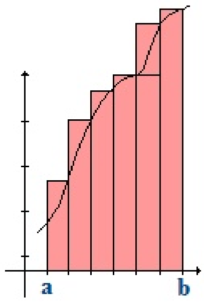
Table des matières

1 Intégrales et primitives

On considère une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$. On cherche à calculer l'aire $\mathscr{A}$ située en dessous du graphe de f noté $\mathscr{C}_f$ et entre les droites d'équations $x = a$, $x = b$ et l'axe des abscisses $\mathscr{O}_x$. Pour ce faire, on peut approcher cette aire par des sommes d'aires de rectangles situés au dessous de la courbe en découpant l'intervalle $[a, b]$ en sous intervalles $[a_n, b_n]$ et on note $\mathscr{A}_n^-$ l'aire obtenue. De la même façon, on peut approcher cette aire par des sommes d'aires de rectangles situés au dessus de la courbe et on note $\mathscr{A}_n^+$ l'aire obtenue.



$\mathscr{A}_n^-$



$\mathscr{A}_n^+$

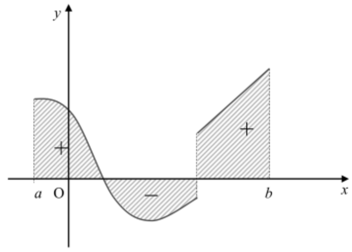
Définition *(Formelle) Si la limite des aires en dessous est égale à la limite des aires au dessus lorsque le pas de subdivision de l'intervalle tend vers* 0 *(càd* $\lim_{n\to+\infty} \mathscr{A}_n^- = \lim_{n\to+\infty} \mathscr{A}_n^+$*), on appelle cette limite commune l'intégrale de* f *sur l'intervalle* $[a, b]$ *et on la note*

$$\mathscr{A} = \int_a^b f(t)dt.$$

On dit alors que f *est intégrable sur* $[a, b]$.

Remarques

a) Si f prend des valeurs positives et négatives, son intégrale sur $[a,b]$ est égale à la somme des aires que forme son graphe avec l'axe des abscisses $\mathcal{O}_x$ selon la règle suivante : si la forme géométrique est située au dessus de l'axe des abscisses, son aire est comptée positivement alors que si elle est au dessous, l'aire est comptée négativement.



b) Si f est une fonction constante égale à $m \in \mathbb{R}$ sur $[a,b]$,alors

$$\int_a^b f(t)dt = m \times (b-a).$$

Propriétés *Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a,b]$.*

1. *La fonction $f+g$ est intégrable et on a*
$$\int_a^b (f+g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt.$$
2. *Pour tout nombre réel λ, la fonction λf est intégrable et on a*
$$\int_a^b \lambda f(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt.$$
3. *Si $f \geqslant g$ alors*
$$\int_a^b f(t)dt \geqslant \int_a^b g(t)dt.$$
4. *Pour tout $c \in]a,b[$, f est intégrable sur $[a,c]$ et $[c,b]$ et on a*
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

Remarques

- *Deux fonctions qui diffèrent en un nombre fini de points ont la même intégrale.*
- ***Attention :*** $\displaystyle\int_a^b f(t) \times g(t)dt \neq \int_a^b f(t)dt \times \int_a^b g(t)dt.$
- *Pour toute fonction f et tout réel a on pose par convention* $\displaystyle\int_a^a f(t)dt = 0.$
- *Si f est intégrable sur $[a,b]$, on pose* $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt.$
- *Grâce à ces deux conventions, on obtient la formule d'addition, dite relation de Chasles :*
$$\forall x,y,z \in [a,b], \quad \int_x^z f(t)dt = \int_x^y f(t)dt + \int_y^z f(t)dt,$$
quel que soit l'ordre entre x, y et z.

Nous utiliserons dans la suite le critère d'intégrabilité suivant :

Théorème *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a,b]$ alors f est intégrable sur $[a,b]$.*

Remarque *(Autre critère) Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est monotone* * *sur $[a,b]$ alors f est intégrable sur $[a,b]$.*

$*$. Une fonction est dite monotone sur $[a,b]$ si elle est croissante ou décroissante sur $[a,b]$.

Définitions. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.*

- *Si I est un intervalle ouvert*[†] *, une primitive de f est une fonction $F : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I et telle que $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$.*
- *Si $I = [a,b[,]a,b]$ ou $[a,b]$, une primitive de f est une fonction $F : I \to \mathbb{R}$ continue sur I, dérivable sur $]a,b[$ et telle que $\forall x \in]a,b[, F'(x) = f(x)$.*

Remarque *Si F est une primitive de la fonction $f : I \to \mathbb{R}$, toute primitive G de f sur I est de la forme :*

$$\begin{array}{rcl} G : I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & F(x) + c, \end{array}$$

où c est un réel quelconque. Autrement dit, deux primitives d'une même fonction sont égales à une constante près.

Théorème *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, pour tout $a \in I$, la fonction $F : I \to \mathbb{R}$ définie par*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \forall x \in I,$$

est une primitive de f.

Remarque *Ce théorème nous dit que toute fonction continue sur I possède des primitives. De plus, pour tout $a \in I$, la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.*

2 Outils et techniques de calcul

2.1 Primitives évidentes

Lorsque l'on cherche la primitive d'une fonction, on commence par regarder si celle-ci ne s'écrit pas sous la forme $u'(x) \times f(u(x))$, avec $f(u(x))$ égale à l'une des expressions suivantes ($\alpha \in \mathbb{R}$) :

$$u^\alpha(x),\ \frac{1}{\sqrt{u(x)}},\ \frac{1}{u(x)},\ e^{u(x)},\ \cos(u(x)),\ \sin(u(x)),\ 1+\tan^2(u(x)),\ \frac{1}{\cos^2(u(x))},\ \frac{1}{1+u^2(x)},\ \frac{1}{\sqrt{1-u^2(x)}},$$

puis on se réfère au tableau des primitives usuelles en annexe.

Exemples *Donner une primitive des fonctions suivantes :*

1. $f_1(x) = (x+1)^4 = u'(x) \times (u(x))^4$ *avec* $u(x) = x+1$*, a pour primitive*

$$F_1(x) = \frac{1}{5}(u(x))^5 = \frac{1}{5}(x+1)^5.$$

2. $f_2(x) = (4x+1)^2 = ... \times 4(4x+1)^2 = ...$ *avec* $u(x) = ...$*, a pour primitive*

$$F_2(x) = ...$$

†. C'est à dire de la forme $]-\infty, a[$, $]a,b[$ ou $]b,+\infty[$, avec $a, b \in \mathbb{R}, a < b$.

3. $f_3(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+3}} = \dfrac{}{}$ *avec* $u(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$, *a pour primitive*

$$F_3(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

4. $f_4(x) = \dfrac{x}{\sqrt{2x^2+3}} = \ldots\ldots \times \dfrac{4x}{\sqrt{2x^2+3}} = \ldots\ldots \times \dfrac{}{}$ *avec* $u(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$, *a pour primitive*

$$F_4(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

5. $f_5(x) = (6x+1)e^{3x^2+x} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ *avec* $u(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$, *a pour primitive*

$$F_5(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

6. $f_6(x) = 3xe^{5x^2} = \ldots\ldots\ldots \times 10xe^{5x^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ *avec* $u(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$, *a pour primitive*

$$F_6(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

7. $f_7(x) = 4x\cos(x^2+3) = \ldots\ldots\ldots\ldots \cos(x^2+3) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ *avec* $u(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$, *a pour primitive*

$$F_7(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

8. $f_8(x) = (2x-3)\sin(x^2-3x+1) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ *avec* $u(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, *a pour primitive*

$$F_8(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

9. $f_9(x) = \dfrac{12x+2}{\cos^2(3x^2+x+\frac{1}{12})} = \ldots\times\dfrac{}{\cos^2(3x^2+x+\frac{1}{12})} = \ldots\times\dfrac{}{}$ *avec* $u(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, *a pour primitive*

$$F_9(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

10. $f_{10}(x) = \dfrac{3}{1+4x^2} = \ldots \times \dfrac{1}{1+(\ldots)^2} = \ldots \times \dfrac{2}{1+(\ldots)^2} = \ldots \times \dfrac{}{}$ *avec* $u(x) = \ldots\ldots$, *a pour primitive*

$$F_{10}(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

11. $f_{11}(x) = \dfrac{6x^2+8x+9}{2x^3+4x^2+9x-3} = \dfrac{}{}$ *avec* $u(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, *a pour primitive*

$$F_{11}(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

12. $f_{12}(x) = \dfrac{3x+6}{x^2+4x} = \ldots \times \dfrac{x+2}{x^2+4x} = \ldots \times \dfrac{2x+4}{x^2+4x} = \ldots \times \dfrac{}{}$ *avec* $u(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$, *a pour primitive*

$$F_{12}(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

13. $f_{13}(x) = \dfrac{5}{\sqrt{1-9x^2}} = \dfrac{5}{\sqrt{1-(.....)^2}} = ... \times \dfrac{}{\sqrt{1-(.....)^2}} = ... \times \dfrac{}{\sqrt{\qquad}}$ ***avec*** $u(x) = ...$, ***a pour primitive***

$$F_{13}(x) = ...$$

14. $f_{14}(x) = \dfrac{2}{\sqrt{-x^2+6x-8}} = \dfrac{2}{\sqrt{\qquad}} = \dfrac{2}{\sqrt{\qquad}} = \dfrac{2}{\sqrt{\qquad}}$

$= 2 \times \dfrac{}{\sqrt{\qquad}}$ ***avec*** $u(x) = ...$, ***a pour primitive***

$$F_{14}(x) = ...$$

15. $f_{15}(x) = \dfrac{5x}{\sqrt{-4x^4+20x^2-24}} = \dfrac{5x}{\sqrt{\qquad}} = \dfrac{5x}{\sqrt{\qquad}} = ...\times\dfrac{....}{\sqrt{\qquad}}$

$= .... \times \dfrac{}{\sqrt{\qquad}}$ ***avec*** $u(x) = ...$, ***a pour primitive***

$$F_{15}(x) = ...$$

16. $f_{16}(x) = \dfrac{7}{9x^2+12x+5} = \dfrac{7}{\qquad} = \dfrac{7}{\qquad} = ... \times \dfrac{.....}{\qquad}$

$= ..... \times \dfrac{}{\qquad}$ ***avec*** $u(x) = ...$, ***a pour primitive***

$$F_{16}(x) = ...$$

17. $f_{17}(x) = \dfrac{5x}{x^4+6x^2+10} = \dfrac{5x}{\qquad} = \dfrac{5x}{\qquad} = ... \times \dfrac{.....}{\qquad}$

$= ..... \times \dfrac{}{\qquad}$ ***avec*** $u(x) = ...$, ***a pour primitive***

$$F_{17}(x) = ...$$

18. $f_{18}(x) = \dfrac{x^3+3x}{x^4+6x^2+10} = ...\times\dfrac{4x^3+12x}{x^4+6x^2+10} = ...\times\dfrac{}{\qquad}$ ***avec*** $u(x) = ...$, ***a pour primitive***

$$F_{18}(x) = ...$$

19. $f_{19}(x) = \dfrac{5x}{9x^4-12x^2+5} = \dfrac{5x}{\qquad} = \dfrac{5x}{\qquad} = ... \times \dfrac{}{\qquad}$

$= ..... \times \dfrac{}{\qquad}$ ***avec*** $u(x) = ...$, ***a pour primitive***

$$F_{19}(x) = ...$$

2.2 Intégration par parties

On considère u et v deux fonctions dérivables sur un même intervalle $[a,b]$ et telles que u' et v' soient continues sur $[a,b]$. On sait que $(uv)' = u'v + uv'$, en intégrant ceci sur $[a,b]$, on obtient

$$\left[u(x)v(x)\right]_a^b = \int_a^b (uv)'(x)dx = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx,$$

où on a utilisé la notation $\left[f(x)\right]_a^b = f(b) - f(a)$. On en déduit alors la formule dite « d'intégration par parties » :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

ou, pour une intégrale indéfinie (c'est à dire sans bornes définies) :

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx.$$

Exemples

1. *Calculer* $\int_0^1 xe^x dx$. *On pose* $u(x) = x$ *et* $v'(x) = e^x$, *de cette façon,* $u'(x) = 1$ *et* $v(x) = e^x$. *Les fonctions* u *et* v *ainsi définies sont dérivables sur* $[0,1]$, u' *et* v' *sont continues et la formule d'intégration par parties donne alors*

$$\begin{aligned} \int_0^1 xe^x dx &= \left[u(x)v(x)\right]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x)dx \\ &= \left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 1 \times e^x dx \\ &= \left[xe^x\right]_0^1 - \left[e^x\right]_0^1 \\ &= e - 0 - (e-1) \\ &= 1. \end{aligned}$$

2. *Calculer* $\int_1^e x\ln(x)dx$. *On pose* $u(x) = \ln(x)$ *et* $v'(x) = x$, *alors* $u'(x) =$ ...... *et* $v(x) =$ .... *Les fonctions* u *et* v *ainsi définies sont dérivables sur* $[1,e]$, u' *et* v' *sont continues et la formule d'intégration par parties donne alors*

$$\begin{aligned} \int_1^e x\ln(x)dx &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

3. *Calculer* $\int \arcsin(x)dx$. *On pose* $u(x) = \arcsin(x)$ *et* $v'(x) = 1$, *alors* $u'(x) = \frac{\quad}{\quad}$ *et* $v(x) =$ ....

Les fonctions u *et* v *ainsi définies sont dérivables sur* $]-1,1[$, u' *et* v' *sont continues et la* *formule d'intégration par parties donne alors*

$$\begin{aligned}\int \arcsin(x)dx &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

4. *Donner une primitive de $f : x \mapsto x^2 e^x$ sur $\mathbb{R}$. On pose $u(x) = x^2$ et $v'(x) = e^x$, de cette façon, $u'(x) = \ldots\ldots$ et $v(x) = \ldots\ldots$. On a*

$$\int x^2 e^x dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

L'astuce pour calculer cette intégrale qui contient une exponentielle consiste à refaire une intégration par parties pour calculer $\int xe^x dx$. On pose $\bar{u}(x) = x$ et $\bar{v}'(x) = e^x$ et on obtient

$$\begin{aligned}\int xe^x dx &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

d'où

$$\int x^2 e^x dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est donc $F : x \mapsto \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$.

2.3 Changement de variables

Quand on écrit une intégrale, la fonction inétégrée est décrite à l'aide d'une variable dite muette car elle ne jour de rôle essentiel; on peut, de fait, la remplacer par une autre notation sans modifier pour autant la valeur de l'intégrale. Ainsi, on a toujours $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$; cela correspond à un changement de variable puisque que l'on a remplacé x par t. Dans cet exemple t joue exactement le même rôle que x dans le sens où, au sein de l'intégrale, on a $t = x$. On peut toutefois faire des changements de variable plus subtile, permettant de modifier totalement l'expression de la fonction intégrée sans pour autant changer la valeur finale de l'intégrale.

Théorème *Soient I, J deux intervalles, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $\varphi : J \to I$ une fonction bijective, dérivable et telle que φ' soit continue. Pour tout $a, b \in I$, on a en posant $x = \varphi(t)$*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Cela revient à remplacer, dans l'intégrale, tout ce qui dépend de x par quelque chose qui dépend de t. Or x apparaît à trois endroits :

- dans l'expression $f(x)$, où il faut remplacer x par $\varphi(t)$;
- dans le dx, lequel correspond informellement à "la dérivé de la variable x", or $x = \varphi(t)$ ce qui peut se lire comme la composé de φ avec la "variable t", et en appliquant un équivalent de la formule de dérivé d'une fonction composée, a pour "dérivé", $\varphi'(t)dt$;
- même si cela n'est pas très visible pas dans la notation, x apparaît également dans les bornes de l'intrégrale puisque celles-ci correspondent aux cas $x = a$ et $x = b$, exprimés en terme de t cela correspond aux cas $t = \varphi^{-1}(a)$ et $t = \varphi^{-1}(b)$ puisque $x = \varphi^{-1}(t)$.

Voici en pratique comment on applique ce théorème :

Exemples *1. Calculer* $\int_1^2 \frac{x}{1+x^4}dx$ *en posant* $t = x^2$. *L'application* $x \mapsto x^2$ *est une bijection continue de* $[1,2]$ *vers* $[1,4]$ *et sa dérivée* $x \mapsto 2x$ *est continue sur* $[1,2]$, *ce changement de variables est donc admissible. On procède par étapes :*

- *Les bornes de l'intégrale : si* $x = 1$, *alors* $t = 1^2 = 1$ *et si* $x = 2$ *alors* $t = 2^2 = 4$.
- *La variable d'intégration : comme* $t = x^2$, *par dérivation,* $dt = (x^2)'dx = 2xdx$.
- *L'intégrale :*

$$\int_1^2 \frac{x}{1+x^4}dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{2x}{1+\left(x^2\right)^2}dx = \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{1}{2}\left[\arctan(t)\right]_1^4 = \frac{1}{2}(\arctan(4) - \arctan(1)).$$

2. Calculer $\int_0^1 \frac{2}{e^x + e^{-x}}dx$ *en posant* $t = e^x$. *L'application* $x \mapsto e^x$ *est une bijection continue de .... vers .... et sa dérivée* $x \mapsto$ *............ est continue sur ...., ce changement de variable est donc admissible.*

- *Les bornes de l'intégrale : si* $x = 0$, *alors* $t =$ *.... et si* $x = 1$ *alors* $t =$ *.....*
- *La variable d'intégration : comme* $t = e^x$, *par dérivation,* $dt =$ *.............*
- *L'intégrale : on a*

$$\int_0^1 \frac{2}{e^x + e^{-x}}dx = \int_0^1 \frac{2e^x}{e^x(e^x + e^{-x})}dx = 2\int_0^1 \frac{\cdots\cdots\cdots}{\left(\ldots\ldots\right)^2 + 1} = 2\int_{\ldots}^{\ldots} \frac{\cdots}{\quad} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

=...

3. Calculer $\int_3^8 \frac{1}{x\sqrt{1+x}}dx$ *en posant* $t = \sqrt{1+x}$. *L'application* $x \mapsto \sqrt{1+x}$ *est une bijection continue de .... vers .... et sa dérivée* $x \mapsto$ *.................... est continue sur ...., ce changement de variable est donc admissible.*

- *Les bornes de l'intégrale : si* $x = 3$, *alors* $t =$ *.... et si* $x = 8$ *alors* $t =$ *....*
- *La variable d'intégration : comme* $t = \sqrt{1+x}$, *par dérivation,* $dt =$ *..................*
- *Comme* $t = \sqrt{1+x}$, *on a* $x =$ *................*

- *L'intégrale : on a*

$$\int_3^8 \frac{1}{x\sqrt{1+x}}dx = \ldots\ldots \int_3^8 \frac{1}{x} \times \frac{1}{2\sqrt{1+x}}dx = \ldots\ldots \int_{\ldots\ldots}^{\ldots\ldots} \overline{\qquad\qquad\qquad} = \ldots \int_{\ldots\ldots}^{\ldots\ldots} \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad} .$$

Pour calculer cette intégrale, on va décomposer $\frac{1}{(t-1)(t+1)}$ *en éléments simples : on cherche* $a, b \in \mathbb{R}$ *tels que*

$$\frac{1}{(t-1)(t+1)} = \frac{a}{t-1} + \frac{b}{t+1} = \frac{\qquad\qquad\qquad}{(t-1)(t+1)} = \frac{\qquad\qquad\qquad}{(t-1)(t+1)},$$

ce qui amène à $\begin{cases} a+b &= \ldots\ldots \\ a-b &= \ldots\ldots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= \ldots\ldots \\ b &= \ldots\ldots \end{cases}$

Finalement

$$\begin{aligned} 2\int_2^3 \frac{1}{(t-1)(t+1)}dt &= 2\int_2^3 \frac{1}{\ldots\ldots(t-1)}dt - 2\int_2^3 \frac{1}{\ldots\ldots(t+1)}dt \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

4. *Calculer* $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\cos(x)}{2-\cos^2(x)}dx$ *en posant* $t = \sin(x)$*. L'application* $x \mapsto \sin(x)$ *est une bijection continue de* .... *vers* .... *et sa dérivée* $x \mapsto$ .... *est continue sur* ...., *ce changement de variable est donc admissible.*

   - *Les bornes de l'intégrale : si* $x = -\pi/4$*, alors* $t =$ .... *et si* $x = \pi/4$ *alors* $t =$ ....
   - *La variable d'intégration : comme* $t = \sin(x)$*, on a* $dt =$ ....
   - *L'intégrale : on a* $f(x) = \frac{\cos(x)}{2-\cos^2(x)} = \frac{\cos(x)}{\qquad\qquad\qquad} = \frac{\cos(x)}{\qquad\qquad\qquad}$*,*
     et donc

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\cos(x)}{2-\cos^2(x)}dx = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\cos(x)}{\qquad\qquad\qquad}dx = \int \overline{\qquad\quad} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

....

5. *Calculer* $\int_0^{1/2} \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}dx$ *en posant* $t = 1-x^2$*. L'application* $x \mapsto 1-x^2$ *est une bijection continue de* .... *vers* .... *et sa dérivée* $x \mapsto$ .... *est continue sur* ...., *ce changement de variable est donc admissible.*

- *Les bornes de l'intégrale : si* $x = 0$*, alors* $t = ...$ *et si* $x = 1/2$ *alors* $t = ...$
- *La variable d'intégration : comme* $t = 1 - x^2$*, on a* $dt = ...$.
- *L'intégrale : on a* $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}} dx = ... \int_0^{1/2} \frac{-2x}{(1-x^2)^{3/2}} dx = ... \int_{...}^{...} \frac{\quad}{\quad} dt =$.........

....

....

....

6. *Calculer* $\displaystyle\int \cos(x)\sin^3(x)dx$ *en posant* $t = \cos(x)$. ....

....

....

....

....

....

....

....

....

7. *Calculer* $\displaystyle\int \frac{\cos^3(x)}{\sin^4(x)} dx$ *en posant* $t = \sin(x)$.. ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

A Primitives usuelles

Fonction	Primitive	Domaine de validité
a (réel donné)	ax	$\mathbb{R}$
$x^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{-1\}$	$\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{\sqrt{x}},$	$2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\|x\|)$	$\mathbb{R}^*$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$\tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$]-1,1[$
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$	$]-1,1[$
$a^x, a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$	$\frac{a^x}{\ln(a)}$	$\mathbb{R}$

Fonction	Primitive
$u'u^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$\frac{u'}{u}$	$\ln(\|u\|)$
$u'e^u$	e^u
$u'\cos(u)$	$\sin(u)$
$u'\sin(u)$	$-\cos(u)$
$\frac{u'}{\cos^2(u)} = u'\left(1 + \tan^2(u)\right)$	$\tan(u)$
$\frac{u'}{1+u^2}$	$\arctan(u)$
$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\arcsin(u)$

B Exercices

Exercice 1. On considère la fonction $h :]-1,1[\to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \dfrac{1}{1-x^2}, \forall x \in]-1,1[$.

1. Chercher $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in]-1,1[$, $h(x) = \dfrac{A}{1-x} + \dfrac{B}{1+x}$.
2. En déduire une primitive de la fonction h sur $]-1,1[$.

Exercice 2. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{2,3\} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2,3\}.$$

1. Chercher $A, B \in \mathbb{R}$ tels que
$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2,3\}, f(x) = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}.$$
2. En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)dx$.

Exercice 3. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{x+1}{x(x^2+1)}, \forall x \in \mathbb{R}^*.$$

1. Chercher $A, B, C \in \mathbb{R}$ tels que
$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2+1}.$$
2. En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_1^2 f(x)dx$.

Exercice 4. Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx \ ; \qquad I_6 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(x)\cos(x)dx \ ;$$

$$I_2 = \int_1^e \frac{\ln^2(x)}{x}dx \ ; \qquad I_7 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}dx \ ;$$

$$I_3 = \int_1^2 x\sqrt{1+x^2}dx \ ; \qquad I_8 = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}dx \ ;$$

$$I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos^3(x)dx \ ; \qquad I_9 = \int_1^2 \frac{1}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}dx \ ;$$

$$I_5 = \int_1^{e^{\frac{\pi}{4}}} \frac{1+\tan^2\big(\ln(x)\big)}{x}dx \ ; \qquad I_{10} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)dx.$$

Exercice 5. À l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

- $\int_0^2 xe^x de$
- $\int_1^{e^2} x^2\ln(x)dx$
- $\int_1^e \ln(x)dx$
- $\int_0^\pi x\cos(x)dx$
- $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x\arctan(x)dx$
- $\int_0^1 \arcsin(x)dx$

Exercice 6. À l'aide d'une intégration par parties, donner une primitive pour chacune des fonctions suivantes :

- $f_1(x) = x\sin(x)$;
- $f_3(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$;
- $f_5(x) = \arctan(x)$;
- $f_2(x) = (2x+1)e^x$;
- $f_4(x) = \ln(x)$;
- $f_6(x) = \arccos(x)$.

Exercice 7. À l'aide de plusieurs intégrations par parties successives, calculer une primitive sur $\mathbb{R}$ pour chacune des fonctions suivantes :

- $f_1(x) = x^2e^x$;
- $f_3(x) = (x+1)^2e^{-x}$;
- $f_5(x) = \sin(x)\frac{e^x-e^{-x}}{2}$;
- $f_2(x) = x^2\cos(2x)$;
- $f_4(x) = e^x\cos(x)$;
- $f_6(x) = \arcsin^2(x)$.

Exercice 8.

1. À l'aide du changement de variables $t = \sqrt{x}$, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx$.
2. À l'aide du changement de variables $t = \sin(x)$, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x)dx$.
3. (a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\dfrac{t^4}{1+t^2} = t^2 - 1 + \dfrac{1}{1+t^2}$.

   (b) A l'aide du changement de variables $t = \tan(x)$, en déduire $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^4(x)dx$.

Exercice 9.

1. A l'aide du changement de variable $t = e^x$, donner une primitive de $f(x) := \frac{e^x}{\sqrt{x+1}}$.
2. A l'aide du changement de variable $t = \sin(x)$, donner une primitive de $g(x) := \frac{\sin(2x)}{1+\sin^2(x)}$.

Exercice 10.

1. (a) Chercher $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{t+1}{t(t^2+t+1)} = \dfrac{a}{t} + \dfrac{bt+c}{t^2+t+1}$.

   (b) A l'aide du changement de variable $u = \frac{2t+1}{\sqrt{3}}$, donner une primitive de la fonction

   $$f(t) := \frac{1}{t^2+t+1}.$$

   (c) En posant le changement de variables $t = e^x$, en déduire la valeur de

   $$J = \int_0^1 \frac{e^x+1}{e^{2x}+e^x+1}dx.$$

Exercice 11.

1. Montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$.
2. En déduire que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $\sin(3x) = \sin(x)(4\cos^2(x) - 1)$.
3. Chercher $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right\}$, $\dfrac{1}{(2t-1)(2t+1)} = \dfrac{a}{2t-1} + \dfrac{b}{2t+1}$.

4. En posant le changement de variable $t = \cos(x)$, calculer l'intégrale suivante

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1 - \cos(2x)}{\sin(3x)} dx.$$

Exercice 12.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$.
2. A l'aide du changement de variable $t = \frac{1}{x}$, calculer $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) . \arctan(x) dx$.