Université Aix-Marseille 2021–2022

Licence – Mathématiques
Algèbre 2

DM1 : QUELQUES FORMULES SUR LES NOMBRES

Prologue : un peu de méthodologie sur le signe somme

Le signe $\sum$ (prononcer *somme*) a été introduit pour éviter toutes les ambiguités liées aux notations du type $1+3+\cdots+(2n+1)$. Formellement, pour tout $a \leq b \in \mathbb{Z}$ et toute fonction $f : [\![a,b]\!] \to \mathbb{C}$, $\sum_{k=a}^{b} f(k)$ est définie par récurrence sur $b \in \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq a\}$ par

- $\sum_{k=a}^{a} f(k) := f(a)$;
- $\sum_{k=a}^{b+1} f(k) := \left(\sum_{k=a}^{b} f(k)\right) + f(b+1)$.

Ici, k est une variable muette et pourra être remplacée par toute autre notation.

On a par exemple $\sum_{k=1}^{5} k^2 = 1+4+9+16+25 = 55$, ou $\sum_{n=-2}^{1} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \cos(-\pi) + \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \cos(0) + \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Mais, bien entendu, l'intérêt du signe somme réside surtout dans l'utilisation d'indéterminée dans ses bornes, comme par exemple $\sum_{i=1}^{n} \frac{(2)^i}{i}$.

Il y a un certain nombre de règles licites pour manipuler le signe somme (on fixera dans ce qui suit deux entiers $a \leq b \in \mathbb{Z}$ et une fonction $f : [\![a,b]\!] \to \mathbb{C}$) :

- distributivité sous le signe somme :
$$\alpha \sum_{k=a}^{b} f(k) = \sum_{k=a}^{b} \alpha f(k)$$
pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$.
Par exemple $2\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2} = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)$;
- séparation de sommes :
$$\sum_{k=a}^{b} f(k) = \sum_{k=a}^{c} f(k) + \sum_{k=c+1}^{b} f(k)$$
pour tout $c \in [\![a, b-1]\!]$. Mais attention, la fonction f sommée doit être la même dans les deux sommes !
Par exemple $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+k^2} = \sqrt{2} + \sum_{k=2}^{n} \sqrt{1+k^2}$ ou $\sum_{k=-n}^{2n} \frac{1}{k^2+1} = \sum_{k=-n}^{0} \frac{1}{k^2+1} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^2+1}$;
- additivité des sommes :
$$\sum_{k=a}^{b} f(k) + \sum_{k=a}^{b} g(k) = \sum_{k=a}^{b} \big(f(k) + g(k)\big)$$
pour toute fonction $g : [\![a,b]\!] \to \mathbb{C}$. Mais attention, les bornes a et b de sommation des deux sommes doivent être les mêmes !
Par exemple $\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} -(k-2)^3 = \sum_{k=1}^{n} \left(k^2 - (k-2)^3\right)$;
- changement d'indice
$$\sum_{k=a}^{b} f(k) = \sum_{k=a'}^{b'} f\big(\psi(k)\big)$$
où $a' \leq b' \in \mathbb{Z}$ sont deux entiers et ψ une bijection de $[\![a',b']\!]$ dans $[\![a,b]\!]$; cela revient à faire un changement d'indice $k' = \psi^{-1}(k)$. Pour ne pas s'embrouiller, il peut être utile d'utiliser un nouvel indice de sommation (k' à la place de k), mais par souçi d'économie des variables, il est courant de garder le même.
Par exemple $\sum_{k=2}^{n} \frac{2}{n+3-k} = \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k+1}$ en utilisant $\psi(x) := n+2-x$.

Toutes ces règles se démontrent par récurrence. [1]

Terminons par quelques remarques.

- L'ensemble $\mathbb{C}$ peut-être remplacé par n'importe quel espace muni d'une notion de somme. Par exemple $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, les matrices à coefficients complexes... On a ainsi

$$\sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} kx & (-x)^k \\ 1 & -\frac{1}{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\sum_{k=1}^{n} k & \sum_{k=1}^{n}(-x)^k \\ n & -\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \end{pmatrix}.$$

- Nous avons fait ici des sommes sur des intervalles d'entiers, mais, de façon similaire, on peut sommer sur des ensembles finis. Par exemple

$$\sum_{p\in\mathcal{P}_{\leq n}} \ln\left(1+\frac{1}{p}\right)$$

  où $\mathcal{P}_{\leq n}$ est l'ensemble des nombres premiers inférieurs à n.
- De même, on peut utiliser le signe $\prod$ pour éviter les notations du type $1.3.5.\cdots.(2k+1)$.

Attention : le but premier de ce DM est de travailler les *raisonnements par récurrence* et les *manipulations du signe somme*. Une rédaction irréprochable sera donc attendue !

Exercice 1.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{C}^*$.

1. Montrer, en manipulant les sommes, que

$$a^n - b^n = (a-b)\left(\sum_{i=0}^{n-1} a^{n-i-1}b^i\right).$$

2. Déduire de la question 1 que, si n est impair, alors

$$a^n + b^n = (a+b)\left(\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i a^{n-i-1}b^i\right).$$

3. Déduire de la question 1 que, si $a \neq 1$,

$$\sum_{i=0}^{n-1} a^i = \frac{a^n-1}{a-1}.$$

Remarque : la formule de la question 1 est appelée *identité remarquable*, elle généralise la formule $a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$.

Exercice 2.

Pour tous $n, k \in \mathbb{N}$, on définit $\binom{n}{k}$ par la formule

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } k \in [\![0, n]\!] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

où, pour tout entier $r \in \mathbb{N}^*$, $r!$ est le produit des r premiers entiers, et $0! := 1$.

1. Montrer que, pour tout $n, k \in \mathbb{N}$,

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

1. et c'est un très bon exercice d'essayer de le faire, même si ça n'est pas demandé dans ce DM

2. Soit $a, b \in \mathbb{C}$.
   (a) En écrivant que $(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n$, montrer par récurrence sur n que
   $$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$
   pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) En explicitant bien les coefficients, écrire la formule ci-dessus pour $n = 2$, $n = 3$ et $n = 4$.

Remarque : la formule de la question 2.(a) est appelée *binôme de Newton*, elle généralise la formule $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Exercice 3.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer par récurrence sur n que
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$
2. Montrer par récurrence sur n que
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$
3. Nous allons maintenant montrer une formule similaire pour $\sum_{k=1}^{n} k^3$.
   (a) Montrer que
   $$\sum_{k=0}^{n} (k+1)^4 = (n+1)^4 + \sum_{k=1}^{n} k^4.$$
   (b) En déduire, à l'aide du binôme de Newton, que
   $$4\sum_{k=1}^{n} k^3 = (n+1)^4 - (n+1) - 6\sum_{k=1}^{n} k^2 - 4\sum_{k=1}^{n} k.$$
   (c) En déduire une formule simple pour $\sum_{k=1}^{n} k^3$.
4. A l'aide des formules trouvées précédemment, montrer que
   (a) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$;
   (b) $\sum_{k=1}^{n} k(k^2-1) = \frac{1}{4}(n-1)n(n+1)(n+2)$;
   (c) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$.

Remarque : la technique utilisée dans la question 3 se généralise pour les puissances plus grandes et permet (au prix de quelques calculs) d'exprimer, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{n} k^p$ comme un polynôme en n de degré $p+1$.