

Licence – Mathématiques
Algèbre 2

DM1 : QUELQUES FORMULES SUR LES NOMBRES

Exercice 1.

1. On a

$$\begin{aligned}
 (a-b) \left(\sum_{i=0}^{n-1} a^{n-i-1} b^i \right) &= a \left(\sum_{i=0}^{n-1} a^{n-i-1} b^i \right) - b \left(\sum_{i=0}^{n-1} a^{n-i-1} b^i \right) && \text{(distributivité)} \\
 &= \left(\sum_{i=0}^{n-1} a^{n-i} b^i \right) - \left(\sum_{i=0}^{n-1} a^{n-i-1} b^{i+1} \right) && \text{(distributivité sous le signe somme)} \\
 &= \left(\sum_{i=0}^{n-1} a^{n-i} b^i \right) - \left(\sum_{i=1}^n a^{n-i} b^i \right) && \text{(changement d'indice } i' = i + 1) \\
 &= a^n + \left(\sum_{i=1}^{n-1} a^{n-i} b^i \right) - \left(\sum_{i=1}^{n-1} a^{n-i} b^i \right) - b^n && \text{(séparation de sommes)} \\
 &= a^n - b^n.
 \end{aligned}$$

2. Si n est impair, on a $b^n = -(-b)^n$, et donc

$$\begin{aligned}
 a^n + b^n &= a^n - (-b)^n \\
 &= (a - (-b)) \left(\sum_{i=0}^{n-1} a^{n-i-1} (-b)^i \right) \\
 &= (a + b) \left(\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i a^{n-i-1} b^i \right).
 \end{aligned}$$

3. En appliquant la formule de la question 1 avec $b = 1$, on trouve

$$\begin{aligned}
 a^n - 1 &= a^n - 1^n \\
 &= (a - 1) \left(\sum_{i=0}^{n-1} a^{n-i-1} 1^i \right) \\
 &= (a - 1) \left(\sum_{i=0}^{n-1} a^{n-i-1} \right) \\
 &= (a - 1) \left(\sum_{i=0}^{n-1} a^i \right), && \text{(changement d'indice } i' = n - 1 - i)
 \end{aligned}$$

Mais puisque $a \neq 1$, on a $a - 1 \neq 0$, et donc $\sum_{i=0}^{n-1} a^i = \frac{a^n - 1}{a - 1}$.

Exercice 2.

1. Il faut distinguer plusieurs cas selon la valeur de k :

- si $k < 0$, on a

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = 0 + 0 = 0 = \binom{n+1}{k};$$

- si $k = 0$, on a

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = 0 + \frac{n!}{0!n!} = 1 = \frac{(n+1)!}{0!(n+1)!} = \binom{n+1}{k};$$

- si $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{1}{n-k+1} \cdot \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{1}{k} \cdot \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \\
&= \left(\frac{1}{n-k+1} + \frac{1}{k} \right) \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \\
&= \frac{k+n-k+1}{k(n-k+1)} \cdot \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \\
&= \frac{n+1}{k(n-k+1)} \cdot \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k};
\end{aligned}$$

- si $k = n+1$, on a

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{n!0!} + 0 = 1 = \frac{(n+1)!}{(n+1)!0!} = \binom{n+1}{k};$$

- si $k > n+1$, on a

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = 0 + 0 = 0 = \binom{n+1}{k}.$$

2. (a) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Pour $n = 0$, le résultat est vrai car $(a+b)^0 = 1 = \binom{0}{0} a^0 b^0 = \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} a^k b^{0-k}$.

Supposons maintenant le résultat vrai au rang n . On a alors

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} && \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= a \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \right) + b \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \right) && \text{par distributivité} \\
&= \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} \right) + \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \right) && \text{par distributivité sous le signe somme} \\
&= a^{n+1} + \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} \right) + \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \right) + b^{n+1} && \text{par séparations de sommes} \\
&= a^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} \right) + \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \right) + b^{n+1} && \text{par changement d'indice } k' = k+1 \\
&= a^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n-k+1} \right) + b^{n+1} && \text{par additivité des sommes} \\
&= a^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1} \right) + b^{n+1} && \text{d'après la question 1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1} && \text{par réunifications de sommes}
\end{aligned}$$

(b) En particuliers, on obtient donc

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2; \\
(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3; \\
(a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.
\end{aligned}$$

Exercice 3.

1. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

La formule est vraie pour $n = 1$ car $\sum_{k=1}^1 k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$.

Supposons maintenant le résultat vrai au rang n . On a alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k &= n+1 + \sum_{k=1}^n k = n+1 + \frac{n(n+1)}{2} \\ &= (n+1) \left(\frac{n}{2} + 1 \right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}. \end{aligned}$$

La formule est donc vraie au rang $n+1$ et, par le principe de raisonnement par récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

La formule est vraie pour $n = 1$ car $\sum_{k=1}^1 k^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$.

Supposons maintenant le résultat vrai au rang n . On a alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= (n+1)^2 + \sum_{k=1}^n k^2 = (n+1)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= (n+1) \left(n+1 + \frac{n(2n+1)}{6} \right) = (n+1) \frac{2n^2 + 7n + 6}{6} = (n+1) \frac{(n+2)(2n+3)}{2} \\ &= \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}. \end{aligned}$$

La formule est donc vraie au rang $n+1$ et, par le principe de raisonnement par récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. (a) En séparant le cas $k = n$ puis en faisant un changement d'indice $k' = k+1$, on trouve

$$\sum_{k=0}^n (k+1)^4 = (n+1)^4 + \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^4 = (n+1)^4 + \sum_{k=1}^n k^4.$$

(b) D'après la question précédente, on a

$$\begin{aligned} (n+1)^4 + \sum_{k=1}^n k^4 &= \sum_{k=0}^n (k+1)^4 \\ &= \sum_{k=0}^n (k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1) \\ &= \sum_{k=0}^n k^4 + 4 \sum_{k=0}^n k^3 + 6 \sum_{k=0}^n k^2 + 4 \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n 1 \\ &= \sum_{k=1}^n k^4 + 4 \sum_{k=1}^n k^3 + 6 \sum_{k=1}^n k^2 + 4 \sum_{k=1}^n k + n + 1, \end{aligned}$$

et donc

$$4 \sum_{k=1}^n k^3 = (n+1)^4 - (n+1) - 6 \sum_{k=1}^n k^2 - 4 \sum_{k=1}^n k.$$

(c) D'après ce qui précède, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n k^3 &= \frac{1}{4} \left((n+1)^4 - (n+1) - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) \right) \\
&= \frac{n+1}{4} \left((n+1)^3 - 1 - n(2n+1) - 2n \right) \\
&= \frac{n+1}{4} \left((n+1)^3 - n(2n+1) - (2n+1) \right) \\
&= \frac{n+1}{4} \left((n+1)^3 - (n+1)(2n+1) \right) \\
&= \frac{(n+1)^2}{4} \left((n+1)^2 - (2n+1) \right) \\
&= \frac{(n+1)^2}{4} \left(n^2 + 2n + 1 - (2n+1) \right) \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4}.
\end{aligned}$$

4. Par application des formules précédentes, on a

$$\begin{aligned}
(a) \quad \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{6} \cdot (2n+1+3) \\
&= \frac{n(n+1)(2n+4)}{6} = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(b) \quad \sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{k=1}^n k &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{6} \cdot (2n+1-3) \\
&= \frac{n(n+1)(2n-2)}{6} = \frac{1}{3}(n-1)n(n+1);
\end{aligned}$$

$$(c) \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2.$$

$$\begin{aligned}
(d) \quad \sum_{k=1}^n k^3 - \sum_{k=1}^n k &= \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 - \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)}{2} \left(\frac{n(n+1)}{2} - 1 \right) \\
&= \frac{n(n+1)(n^2+n-2)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)(n-1)(n+2)}{2} = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{2}.
\end{aligned}$$