Université Aix-Marseille 2021–2022

Licence – Mathématiques
Algèbre 2

DM2

Notations : Les groupes seront notés multiplicativement. Pour tout groupe G, on notera

- $Z(G) := \{g \in G \mid \forall h \in G, gh = hg\}$ le centre de G ;
- $\mathrm{Aut}(G)$ le groupe de ses automorphismes ;
- $\langle g \rangle$ le sous-groupe de G engendré par un élément $g \in G$.

Exercice 1.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

1. La matrice A est-elle inversible ?
2. La matrice A est-elle d'ordre fini dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$? Si oui, donner son ordre.
3. On considère l'application $f : \mathbb{Z} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ définie par $f(n) = A^n$.
   (a) Montrer que f est un morphisme de groupe.
   (b) Déterminer le noyau et l'image de f.
   (c) A quel groupe classique $\langle A \rangle$ est-il isomorphe ?

Exercice 2.

Soit G un groupe.

1. Soit $g \in G$. Montrer que l'application

$$\varphi_g : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ h & \longmapsto & ghg^{-1} \end{array}$$

   est un automorphisme de groupe.
2. Montrer que l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(G) \\ g & \longmapsto & \varphi_g \end{array}$$

   est un morphisme de groupe.
3. Déterminer le noyau de φ.

Exercice 3.

Soit G un groupe ne possèdant qu'un unique élément g_0 à être d'ordre 2. Montrer que $g_0 \in Z(G)$.