Université Aix-Marseille 2021–2022

Licence – Mathématiques
Algèbre 2

DM2

Exercice 1.

1. Par calcul direct, on a $\det(A) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 \neq 0$. La matrice est donc inversible.
2. Toujours par calcul direct, on trouve

$$A^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathrm{Id}$$

et donc

$$A^4 = -A \qquad A^5 = -A^2 \qquad A^6 = -A^3 = \mathrm{Id}.$$

La matrice A est donc d'ordre fini égal à 6.

3. (a) Pour tout $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, on a

$$f(n_1 + n_2) = A^{n_1+n_2} = A^{n_1}.A^{n_2} = f(n_1).f(n_2).$$

L'application f est donc un morphisme de groupes.

(b) Soit $n \in \mathbb{Z}$. Par division euclidienne, on a $n = 6q + r$ avec $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in [\![0, 5]\!]$, et donc

$$f(n) = A^{6q+r} = \left(A^6\right)^q .A^r = \mathrm{Id}^q.A^r = A^r.$$

Or d'après les calculs de la question 2, on a $A^r = \mathrm{Id}$ si et seulement si $r = 0$, c'est-à-dire si et seulement si n est un multiple de 6. On a donc $\mathrm{Ker}(f) = 6\mathbb{Z}$.

Par ailleurs, on a $\mathrm{Im}(f) = \{A^n \mid n \in \mathbb{Z}\} = \langle A \rangle$.

(c) Par le théorème d'isomorphisme, on en déduit que $\langle A \rangle \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

Exercice 2.

1. Soit $h_1, h_2 \in G$. On a $\varphi_g(h_1h_2) = gh_1h_2g^{-1} = gh_1g^{-1}gh_2g^{-1} = \varphi_g(h_1)\varphi_g(h_2)$. L'application φ_g est donc un morphisme de groupe. Son groupe de départ étant égal à son groupe d'arrivée, c'est même un endomorphisme de groupe. Enfin, pour tout $h \in G$, on a

$$\varphi_{g^{-1}}\big(\varphi_g(h)\big) = \varphi_{g^{-1}}\big(ghg^{-1}\big) = g^{-1}ghg^{-1}g = h$$

et

$$\varphi_g\big(\varphi_{g^{-1}}(h)\big) = \varphi_g\big(g^{-1}hg\big) = gg^{-1}hgg^{-1} = h.$$

On en déduit que $\varphi_{g^{-1}} \circ \varphi_g = \varphi_g \circ \varphi_{g^{-1}} = \mathrm{Id}_G$. Les morphismes φ_g et $\varphi_{g^{-1}}$ sont donc inverses l'un pour l'autre. Cela implique notamment que φ_g est bijectif ; c'est donc un automorphisme de groupe.

2. Soit g_1 et g_2 deux éléments de G. Pour tout $h \in G$, on a alors

$$(\varphi_{g_2} \circ \varphi_{g_1})(h) = \varphi_{g_2}(g_1hg_1^{-1}) = g_2g_1hg_1^{-1}g_2^{-1} = g_1g_2h(g_1g_2)^{-1} = \varphi_{g_1g_2}(h).$$

On a donc $\varphi_{g_2} \circ \varphi_{g_1} = \varphi_{g_1g_2}$, et φ est un morphisme de groupes.

3. Considérons $g \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Pour tout $h \in G$, on a alors $ghg^{-1} = \varphi_g(h) = \mathrm{Id}_G(h) = h$, et donc $gh = hg$. On en déduit que $\mathrm{Ker}(\varphi) \subset Z(G)$.

Réciproquement, si $g \in Z(G)$, alors pour tout $h \in G$, on a $gh = hg$, et donc $\varphi_g(h) = ghg^{-1} = h = \mathrm{Id}_G(h)$. On a donc $\varphi_g = \mathrm{Id}_G$, et donc $g \in \mathrm{Ker}(\varphi)$.

Au final, on a donc $\mathrm{Ker}(\varphi) = Z(G)$.

Exercice 3.

Pour tout $h \in G$, on a

$$\left(hg_0h^{-1}\right)^2 = hg_0h^{-1}hg_0h^{-1} = hg_0g_0h^{-1} = hg_0^2h^{-1} = he_Gh^{-1} = hh^{-1} = e_G.$$

L'élément hg_0h^{-1} est donc d'ordre 2. Par unicité de l'élément vérifiant cette propriété dans G, on a donc $hg_0h^{-1} = g_0$, et donc $g_0h = hg_0$. On en déduit donc que $g_0 \in Z(G)$.