Université Aix-Marseille 2021–2022

Licence – Mathématiques
Algèbre 2

Examen
9 mai 2022

Il sera tenu compte de la présentation et de la clarté de la rédaction. Toute réponse devra être justifiée.
Les calculatrices, les téléphones portables et les documents sont strictement interdits.
Le barème n'est indiqué qu'à titre indicatif, et pourra être modifié.
L'épreuve dure deux heures.

Exercice 1. (5 points)

1. Donner la définition :
   (a) d'un groupe ;
   (b) d'une transposition ;
   (c) d'un idéal d'un anneau A.
2. Montrer que :
   (a) le noyau d'un morphisme de groupe $f : G_1 \to G_2$ est un sous-groupe distingué de G_1 ;
   (b) pour tout anneau A et tout élément $a \in A$ qui n'est pas un diviseur de zéro, si $ab = ac$ avec $b, c \in A$, alors $b = c$.

Exercice 2. (3 points)
On considère la permutation $\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 6 & 2 & 8 & 5 & 7 & 1 & 9 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Donner sa décomposition en cycles disjoints.
2. Calculer σ^{197}.

Exercice 3. (9 points)

Soit $n \geq 2$ un entier.

1. Dans cette question, on suppose que n est un nombre premier impair. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on note $\overline{k} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sa classe modulo n.
   (a) A l'aide du théorème de Bézout, montrer que tout élément non nul de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est inversible, et en déduire que l'anneau commutatif $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est intègre.
   (b) Montrer que, dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, l'équation $x^2 = \overline{1}$ admet exactement deux solutions que l'on précisera.
   (c) En déduire que, pour tout $k \in [\![2, n-2]\!]$, $\overline{k}$ et $\overline{k}^{-1}$ sont distincts.
   (d) Montrer que $(n-1)! \equiv -1 \mod n$.
   (e) Montrer que le résultat reste vrai pour $n = 2$.
2. Dans cette question, on suppose que n n'est pas un nombre premier et que $n \neq 4$. Montrer qu'il existe deux entiers distincts a et b dans $[\![2, n-1]\!]$ tels que n divise ab.
3. Dans cette question, on ne fait plus d'hypothèse sur la primalité de n. Montrer que :
   - si $n = 4$, alors n divise $(n-1)! + 2$;
   - si n est premier, alors n divise $(n-1)! + 1$;
   - si n n'est pas premier et est différent de 4, alors n divise $(n-1)!$.

Exercice 4. (3 points)

Soit A un anneau intègre.

1. Montrer que, pour tout $a \in A \setminus \{0_A\}$, l'application

$$f_a \colon \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A \\ x & \longmapsto & ax \end{array}$$

   est un morphisme de groupe (pour l'addition) injectif.
2. En déduire que si A est fini (c'est-à-dire qu'il ne possède qu'un nombre fini d'éléments), alors tout élément non nul de A est inversible.