

Licence – Mathématiques
Algèbre 2

MÉMENTO SUR LES NOMBRES ENTIERS

Nous ne donnerons pas ici de définition formelle des nombres entiers, nous nous contenterons de dire qu'il existe un ensemble $\mathbb{N}$ dont les éléments sont appelés *entiers naturels*, et que cet ensemble est muni d'opérations

$$+ : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ (a, b) & \mapsto & a + b \end{array} \quad (\text{addition}) \qquad \cdot : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ (a, b) & \mapsto & a.b \end{array} \quad (\text{multiplication})$$

vérifiant les propriétés suivantes :

- (associativité de $+$) $\forall a, b, c \in \mathbb{N}, (a + b) + c = a + (b + c)$;
- (associativité de $\cdot$) $\forall a, b, c \in \mathbb{N}, (a.b).c = a.(b.c)$;
- (commutativité de $+$) $\forall a, b \in \mathbb{N}, a + b = b + a$;
- (commutativité de $\cdot$) $\forall a, b \in \mathbb{N}, a.b = b.a$;
- (élément neutre pour $+$) $\exists 0 \in \mathbb{N}, \forall a \in \mathbb{N}, a + 0 = 0 + a = a$
- (élément neutre pour $\cdot$) $\exists 1 \in \mathbb{N}, \forall a \in \mathbb{N}, a.1 = 1.a = a$;
- (distributivité de $\cdot$ sur $+$) $\forall a, b, c \in \mathbb{N}, a.(b + c) = a.b + a.c$ et $(a + b).c = a.c + b.c$.

Le nombre 0 joue un rôle très particulier vis-à-vis de la multiplication car il vérifie :

- (absorbance de l'élément 0) $\forall a \in \mathbb{N}, 0.a = 0$;
- (intégrité) $\forall a, b \in \mathbb{N}, a.b = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $b = 0$.

De ce dernier point, on déduit le principe de simplification affirmant que si $a.b = a.c$ avec $a, b, c \in \mathbb{N}$ et $a \neq 0$, alors $b = c$.

Par convention, on note $\mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Sur $\mathbb{N}$, il existe une relation d'ordre total définie, pour tout $a, b \in \mathbb{N}$, par

$$a \geq b \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{N}, a = b + c.$$

Cette relation d'ordre vérifie les propriétés fondamentales suivantes :

- (compatibilité de $\geq$ avec $+$) $\forall a, b, c \in \mathbb{N}, a \geq b \Rightarrow a + c \geq b + c$;
- (compatibilité de $\geq$ avec $\cdot$) $\forall a, b, c \in \mathbb{N}, a \geq b \Rightarrow a.c \geq b.c$;
- (principe du plus petit élément) tout ensemble $\Omega \subset \mathbb{N}$ non vide possède un plus petit élément ; en particulier, 0 est le plus petit élément de $\mathbb{N}$ et 1 le plus petit élément de $\mathbb{N}^*$;
- tout ensemble $\Omega \subset \mathbb{N}$ non vide et majoré possède un plus grand élément ;
- (principe archimédien) $\forall a \in \mathbb{N}, \forall b \in \mathbb{N}^*, \exists n \in \mathbb{N}, n.b > a$.

Un corollaire très utile est le suivant :

Corollaire. Pour tout $a, b \in \mathbb{N}$, $a > b \Leftrightarrow a \geq b + 1$.

Ce corollaire est au cœur du principe de raisonnement suivant :

Principe (de récurrence). Si une proposition dépendant d'un paramètre entier n est vraie pour une valeur n_0 et que sa véracité en n implique sa véracité en $n + 1$, alors elle est vraie pour tout entier plus grand que n_0 . En particulier, si $n_0 = 0$, alors il est vrai pour tout entier naturel.

parfois renforcé en :

Principe (de récurrence généralisée). Si une proposition dépendant d'un paramètre entier n est vraie pour une valeur n_0 et que sa véracité pour tout entier $n_0 \leq k < n$ implique sa véracité en n , alors elle est vraie pour tout entier plus grand que n_0 . En particulier, si $n_0 = 0$, alors il est vrai pour tout entier naturel.

On admettra également que $\mathbb{N}$ peut être étendu en un ensemble $\mathbb{Z}$, dont les éléments sont appelés *entiers relatifs* tels que les opérations $+$ et $\cdot$ et la relation d'ordre $\geq$ s'étendent à $\mathbb{Z}$ et vérifient :

- associativité, commutativité, éléments neutres et distributivité, absorbance de 0, intégrité, compatibilité de $\geq$ avec $+$;
- (éléments opposés) $\forall a \in \mathbb{Z}, \exists -a \in \mathbb{Z}, a + (-a) = 0$;
- $\forall a, b \in \mathbb{Z}, a \geq b \Rightarrow -b \geq -a$.

Plus explicitement, on a $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \sqcup \{-a \mid a \in \mathbb{N}^*\}$. Cela permet de définir l'application valeur absolue suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ | \cdot | : & a \mapsto & \begin{cases} a & \text{si } a \in \mathbb{N} \\ -a & \text{si } a \notin \mathbb{N} \end{cases} . \end{array}$$

On note encore par convention $\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.