Licence – Mathématiques
Algèbre 2PARTIEL
25 février 2022

*Il sera tenu compte de la présentation et de la clarté de la rédaction. Toute réponse devra être justifiée.
Les calculatrices, les téléphones portables et les documents sont strictement interdits.
Le barème n'est indiqué qu'à titre indicatif, et pourra être modifié.
L'épreuve dure deux heures.*

Exercice 1. (5 points)

1. Donner la définition de :
 - la division euclidienne de deux entiers relatifs ;
 - d'un nombre premier ;
 - d'un groupe.
2. Énoncer le lemme de Gauss, et le démontrer.

Exercice 2. (2 points)

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $5^{n+2} + 3^{n+1}5^{2n}$ est divisible par 7.

Exercice 3. (7 points)

1. Déterminer le pgcd de 10001 et 5053.
2. Donner une relation de Bézout entre 10001 et 5053.
3. Trouver un inverse pour $\overline{5053}$ dans $\mathbb{Z}/10001\mathbb{Z}$, c'est-à-dire trouver un élément $\alpha \in \mathbb{Z}/10001\mathbb{Z}$ tel que $\overline{5053} \cdot \alpha = \overline{1}$.
4. Trouver un $x \in \mathbb{Z}$ et un $y \in \mathbb{Z}$ tels que $53x + y + 2$ et $5000x + 10000y - 3$ soient tous les deux divisibles par 10001.

Exercice 4. (6 points)

Pour tout entier $n \geq 2$, on appelle *diviseur propre de n* tout diviseur d de n tel que $1 \leq d < n$. On dit qu'un entier est un nombre *parfait* s'il est égal à la somme de tous ses diviseurs propres.

Pour tout entier $n \geq 2$, on note $M_n := 2^n - 1$ et $P_n := 2^{n-1}(2^n - 1)$.

1. (a) Trouver un entier ayant plusieurs diviseurs propres, et qui ne soit pas parfait.
(b) Trouver un entier qui soit parfait.
2. On fixe maintenant $n \geq 2$ un entier tel que M_n soit un nombre premier.
 - (a) Montrer que n est un nombre premier.
 - (b) Lister tous les diviseurs de P_n .
 - (c) Montrer que P_n est un nombre parfait.