Université Aix-Marseille 2021–2022

Licence – Mathématiques
Algèbre 2

TD3 : Anneaux

Exercice 1. Sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, on considère les opérations

$$+ : \begin{array}{ccc} (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\ \big((a_1, a_2), (b_1, b_2)\big) & \longmapsto & (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \end{array}$$

et

$$* : \begin{array}{ccc} (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\ \big((a_1, a_2), (b_1, b_2)\big) & \longmapsto & (a_1.b_1 + a_2.b_2 \ , \ a_1.b_2 + a_2.b_1 + a_2.b_2) \end{array} .$$

1. Montrer que $\Big(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, *\Big)$ est un anneau.
2. En définissant les opérations $+$ et $*$ sur $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ par les même formules que ci-dessus, montrer que $\Big(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, +, *\Big)$ est un corps commutatif.

Exercice 2. Soit E un ensemble et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des sous-ensembles de E. Pour tout $A, B \in \mathcal{P}(E)$, on rappelle que $A \Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Montrer que $\big(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap\big)$ est un anneau commutatif.

Exercice 3. Soient A_1 et A_2 des anneaux. On munit $A_1 \times A_2$ des lois de composition internes

$$+ : \begin{array}{ccc} (A_1 \times A_2) \times (A_1 \times A_2) & \longrightarrow & A_1 \times A_2 \\ \big((a_1, a_2), (b_1, b_2)\big) & \longmapsto & (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \end{array}$$

et

$$. : \begin{array}{ccc} (A_1 \times A_2) \times (A_1 \times A_2) & \longrightarrow & A_1 \times A_2 \\ \big((a_1, a_2), (b_1, b_2)\big) & \longmapsto & (a_1.b_1, a_2.b_2) \end{array} .$$

1. Montrer que $(A_1 \times A_2, +, \ .\ )$ est un anneau. C'est ce qu'on appelle la structure d'*anneau produit.*
2. Montrer que $(A_1 \times A_2, +, \ .\ )$ est commutatif si et seulement si A_1 et A_2 le sont.

Exercice 4. Soit $(A, +)$ un groupe abélien et $\ .\ : A \times A \to A$ une opération associative sur A, possédant un élément neutre. Montrer que $(A, +, \ .\ )$ est un anneau si et seulement si, pour tout $a \in A$, les applications

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A \\ b & \longmapsto & a.b \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A \\ b & \longmapsto & b.a \end{array}$$

sont des morphismes de groupes.

Exercice 5. Montrer que les suites réelles convergentes forment un sous-anneau des suites réelles.

Exercice 6.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right)^\times = \left\{\overline{k} \mid k \in \mathbb{N}^* \text{ premier avec } n\right\}$.
2. On note $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un anneau.
   (b) Montrer que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})^\times$ est l'ensemble des fonctions qui ne s'annulent pas.

Exercice 7.

1. On note $\mathcal{G} := \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ l'ensemble dit des *entiers de Gauss*.
   (a) Montrer que $\mathcal{G}$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.
   (b) Montrer $\mathcal{G}^\times$ possède exactement 4 éléments.
2. On note $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.
   (a) Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.
   (b) i. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $a_n := \frac{(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n}{2}$ et $b_n := \frac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}$.
   Montrer que $a_n, b_n \in \mathbb{N}$ et que $a_n^2 - 2b_n^2 = (-1)^n$.
   ii. Montrer $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times$ possède une infinité d'éléments.

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

1. (a) Montrer que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\overline{k} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un diviseur de zéro si et seulement si k n'est pas premier avec n.
   (b) En déduire que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est intègre si et seulement si n est premier. Dans ce cas, montrer que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps.
2. (a) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
   i. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Ker}(M)$.
   ii. En déduire que M est un diviseur de zéro.
   (b) Déterminer l'ensemble des diviseurs de zéro dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 9. Pour tout entier $n \geq 2$, on note $\varphi(n) := \left|\left\{k \in [\![1, n]\!] \mid \mathrm{pgcd}(k, n) = 1\right\}\right|$. C'est ce qu'on appelle la fonction *indicatrice d'Euler*.

1. Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, $\varphi(n) = \left|\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right)^\times\right|$.
2. Montrer que, pour tout nombre premier p, $\varphi(p) = p - 1$.
3. Montrer que, pour tout nombre premier p et tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$.
4. Montrer que, pour tous entiers $n_1, n_2 \geq 2$ premiers entre eux, $\varphi(n_1.n_2) = \varphi(n_1).\varphi(n_2)$.
5. Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, $\varphi(n) = n.\prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$, où $p_1, \ldots, p_r$ sont les nombres premiers intervenant dans la décomposition de n en facteurs premiers.
6. On fixe maintenant l'entier $n \geq 2$ et, pour tout diviseur d de n, on note
$$A_d := \left\{k \in [\![1, n]\!] \mid \mathrm{pgcd}(k, n) = d\right\}.$$
   (a) Montrer que, pour tout diviseur d de n, $|A_d| = \varphi\left(\frac{n}{d}\right)$.
   (b) En déduire que $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$.

Exercice 10. Soit A un anneau. On dit que $a \in A$ est *nilpotent* s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^k = 0$.

1. Montrer qu'un élément inversible ne peut pas être nilpotent.
2. Soit $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r} \in \mathbb{N}^*$ décomposé en facteurs premiers. Déterminer l'ensemble des éléments nilpotents de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admt une valeur propre non nulle, alors M n'est pas nilpotente.
   (b) Déterminer l'ensemble des éléments nilpotents de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. Soit $a \in A$ un élément niloptent. A l'aide d'une identité remarquable, montrer que $1+a$ est inversible.

Exercice 11. Soit A un anneau. On considère, pour $a \in A$, l'équation $x^2 = a$.

1. Montrer que, si A est intègre, alors l'équation admet au plus deux solutions.
2. On fixe maintenant $n \in \mathbb{N}^*$ et on se place dans le cas $A = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $a = \mathrm{Id}$. Montrer que l'équation possède alors au moins 2^n solutions.

Exercice 12. Soit A un anneau. Pour tout ensemble $X \subset A$, on note $\langle X \rangle$ l'intersection de tous les sous-anneaux de A contenant X.

1. Montrer qu'une intersection quelconque de sous-anneaux de A est un sous-anneau de A.
2. Montrer que, pour tout $X \subset A$, $\langle X \rangle$ est le plus petit sous-anneau de A contenant X dans le sens où il est contenu dans tout sous-anneau de A contenant X.
3. On se place maintenant dans le cas $A = \mathbb{C}$.
   (a) Montrer que $\langle \emptyset \rangle = \mathbb{Z}$.
   (b) Montrer que $\langle \{ \frac{1}{10} \} \rangle$ est l'ensemble des nombres décimaux.
   (c) Montrer que $\langle \{ i \} \rangle = \{ a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z} \}$ l'anneau des entiers de Gauss.
   (d) Montrer que $\langle \{ e^{\frac{2i\pi}{3}} \} \rangle = \left\{ \frac{a+ib\sqrt{3}}{2} \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ tels que } a \equiv b \ [2] \right\}$.

Exercice 13. Soit $n \geq 2$ un entier. Montrer que l'application $\mathrm{Tr} : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est un imorphisme de groupes, mais n'est pas un morphisme d'anneaux.

Exercice 14. Pour tout $\Omega \subset \mathbb{R}$, on note $\mathcal{F}_\Omega := \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R} \setminus \Omega, f(x) = 0 \right\} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\mathcal{F}_\Omega^0 := \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0 \} \text{ est un sous-ensemble fini de } \Omega \right\} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. Montrer que, pour tout $\Omega \subset \mathbb{R}$, $\mathcal{F}_\Omega$ et $\mathcal{F}_\Omega^0$ sont des idéaux de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. (a) Montrer que tout idéal I de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, il existe un unique $\Omega \subset \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{F}_\Omega^0 \subset I \subset \mathcal{F}_\Omega$.
   (b) Trouver un idéal $I \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\mathcal{F}_\Omega^0 \subsetneq I \subsetneq \mathcal{F}_\Omega$
3. Montrer que, pour tout $\Omega \subset \mathbb{R}$ de cardinal infini, $\mathcal{F}_\Omega$ est engendré par un seul élément, mais que ça n'est pas le cas pour $\mathcal{F}_\Omega^0$.

Exercice 15. Soit A un anneau commutatif. Montrer que l'ensemble $\mathcal{N}(A) := \left\{ a \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}^*, a^n = 0 \right\}$ des éléments nilpotents est un idéal de A.

Exercice 16. Soit A un anneau et I un idéal. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

i. $I = A$;
ii. I est un sous-anneau unitaire de A ;
iii. $1_A \in I$;
iv. I contient un élément inversible.

Exercice 17. En considérant l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ P & \longmapsto & P(i) \end{array},$$

montrer que $\mathbb{C}$ est isomorphe, en tant qu'anneau, à $\mathbb{R}[X]/(X^2+1)$.

Exercice 18. On considère $\ell(\mathbb{Q})$ l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{Q}$ et on note

- $\ell_C(\mathbb{Q}) := \left\{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell(\mathbb{Q}) \mid \forall k \in \mathbb{N}^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}, n_1, n_2 \geq N \Rightarrow |u_{n_2} - u_{n_1}| < \frac{1}{k} \right\}$ le sous-ensemble des suites *de Cauchy* ;
- $\ell_0(\mathbb{Q}) := \left\{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell(\mathbb{Q}) \mid \forall k \in \mathbb{N}^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_n| < \frac{1}{k} \right\}$ le sous-ensemble des suites *convergeant vers* 0.

1. (a) Montrer que tout élément de $\ell_C(\mathbb{Q})$ est une suite bornée.
   (b) En déduire que $\ell_C(\mathbb{Q})$ est un sous-anneau de $\ell(\mathbb{Q})$.
2. Montrer que $\ell_0(\mathbb{Q})$ est un idéal de $\ell_C(\mathbb{Q})$.
3. (a) Montrer qu'une suite dans $\ell_C(\mathbb{Q})$ converge dans $\mathbb{R}$.
   (b) En considérant l'application

$$\lambda : \begin{array}{ccc} \ell_C(\mathbb{Q}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} & \longmapsto & \lim\limits_{n \to \infty} u_n \end{array},$$

   montrer que $\mathbb{R}$ est isomorphe, en tant qu'anneau, à $\ell_C(\mathbb{Q})/\ell_0(\mathbb{Q})$.

C'est en fait une des constructions de $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$.