Université Aix-Marseille 2021–2022

**Licence – Mathématiques**
**Algèbre 2**

TD3bis : Compléments sur les anneaux

# Propriétés d'anneaux

Dans toute cette section, on ne considérera que des anneaux *commutatifs* et *intègres*.

**Exercice 1.** On considère l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{10}] := \{a + \sqrt{10}\, b \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

1. (a) Soit $a + \sqrt{10}b \in \mathbb{Z}[\sqrt{10}]^\times$.
      i. Montrer que $a \neq 0$ et que $a$ est premier avec $b$ et avec 10.
      ii. Montrer que $a^2 - 10b^2 = \pm 1$.
   (b) Déterminer tous les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$.
2. (a) Supposons dans cette question que 2 n'est pas irréductible dans $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$.
      i. Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $a^2 - 10b^2 = \pm 2$.
      ii. Montrer que $a$ est pair et $b$ impair.
      iii. On pose $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ tels que $a = 2\alpha$ et $b = 2\beta + 1$. Montrer que $\alpha^2 - 10\beta(\beta + 1) \in \{2, 3\}$.
      iv. En déduire que, modulo 4, $\alpha^2$ est congru à 2 ou $-1$.
   (b) Montrer que 2 est irréductible dans $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$.
3. Montrer que 2 n'est pas premier dans $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$.

**Exercice 2.** On considère l'anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}] := \{a + ib\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que l'application
$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[i\sqrt{5}] & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ a + ib\sqrt{5} & \longmapsto & a^2 + 5b^2 \end{array}$$
   vérifie, pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$, $\varphi(x_1.x_2) = \varphi(x_1).\varphi(x_2)$.
2. A l'aide de $\varphi$, déterminer tous les inversibles de $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$.
3. A l'aide de $\varphi$, déterminer tous les diviseurs non inversibles de 9, puis tous les diviseurs non inversibles de $3(2 + i\sqrt{5})$.
4. Montrer que 9 et $3(2 + i\sqrt{5})$ ne sont pas associés.
5. Montrer 9 et $3(2 + i\sqrt{5})$ n'ont pas de plus grand diviseur commun dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$.
6. Montrer que 3 et $2 + i\sqrt{5}$ n'ont pas de plus petit multiple commun dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$.

**Exercice 3.** Soit $A$ un anneau. On dit qu'un idéal $I \subset A$ est

- *premier* si $A/I$ est intègre ;
- *maximal* si $A/I$ est un corps.

1. Montrer que tout idéal maximal est premier.
2. Montrer que $(X) \subset \mathbb{Z}[X]$, où $\mathbb{Z}[X]$ est l'anneau des polynômes à coefficients entiers, est premier sans être maximal.
3. Montrer que $I$ est un idéal maximal si et seulement si $I \neq A$ et que, pour tout idéal $J$ tel que $I \subset J \subset A$, on a $J = I$ ou $J = A$.
4. Soit $a \in A^* \setminus A^\times$.
   (a) Montrer que $a$ est premier si et seulement si $(a)$ l'est.
   (b) A l'aide de la question 3., montrer que, si $(a)$ est maximal, alors $a$ est irréductible.
   (c) En choisissant bien $A$, par exemple en le prenant non factoriel, montrer que $a$ peut être irréductible sans que $(a)$ soit maximal.

**Exercice 4.** On considère ici $[a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervalle compact et $\mathcal{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ l'anneau des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $f \in \mathcal{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$, on appelle *support de* $f$ l'ensemble $\mathrm{Supp}(f) := \big\{x \in [a,b] \mid f(x) \neq 0\big\}$. Pour tout $x_0 \in [a,b]$, on note $\mathcal{C}_{x_0} := \big\{f \in \mathcal{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big) \mid f(x_0) = 0\big\} \subset \mathcal{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$.

1. (a) Montrer que les inversibles de $\mathcal{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ sont les fonctions qui s'annulent pas.
   (b) Soit $I \subset \mathcal{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ un idéal.
      i. Montrer que si $f \in I$, alors $I$ contient une fonction positive $f_+$ telle que $\mathrm{Supp}(f_+) = \mathrm{Supp}(f)$.
      ii. On suppose que, pour tout $x \in [a,b]$, il existe $f \in I$ telle que $f(x) \neq 0$. En admettant [1] que, si $\underset{f\in I}{\cup} \mathrm{Supp}(f) = [a,b]$, alors il existe un sous-ensemble fini $E \subset I$ tel que $\underset{f\in E}{\cup} \mathrm{Supp}(f) = [a,b]$, montrer que $I = \mathcal{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$.
2. Soit $x_0 \in [a,b]$. Montrer que $\mathcal{C}_{x_0}$ est (a) un idéal, (b) maximal, (c) non principal.
3. Montrer que tout idéal maximal de $\mathcal{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ est de la forme $\mathcal{C}_{x_0}$, avec $x_0 \in [a,b]$.
4. Soit $I$ un idéal maximal de $\mathcal{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$. Montrer que $\mathcal{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)/I$ est isomorphe à $\mathbb{R}$.

**Exercice 5.** Soit $\mathbb{Z}[i] \subset \mathbb{C}$ l'anneau des entiers de Gauss. On considère l'application

$$\nu : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[i] & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ a+ib & \longmapsto & a^2+b^2 \end{array}.$$

1. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe $\widetilde{z} \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $|\widetilde{z} - z|^2 \leq \frac{1}{2}$.
2. En considérant, pour tout $a \in \mathbb{Z}[i]$ et $b \in \mathbb{Z}[i]^*$ une approximation dans $\mathbb{Z}[i]$ de $\frac{a}{b} \in \mathbb{C}$, montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau euclidien.
3. Déterminer un plus grand diviseur commun, ainsi qu'une relation de Bézout associée pour $1+3i$ et $3+i$.

## Polynômes

**Exercice 6.** Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ :

1. tels que $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$ ;
2. tels que $(X-16)P(2X) = 16(X-1)P(X)$ ;
3. tels que $P(X+1) = P(X-1)$.

**Exercice 7.** Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré au plus 3 :

1. vérifiant $P(1) = P(2) = 0$ ;
2. vérifiant $P(1) = P(2) = 1$ ;
3. vérifiant $P(1) = P'(1) = 1$ ;
4. vérifiant $P(0) = 0$, $P'(1) = 1$, $P''(2) = 2$ et $P'''(3) = 3$.

**Exercice 8.**

1. Effectuer les divisions euclidiennes :
   (a) de $2X^3 + X^2 - 2$ par $X+2$ ;
   (b) de $X^5 - X^4 + 6X^2 - 3X - 1$ par $X^2 - 2X + 1$ ;
   (c) de $X^5 - X^4 + 6X^2 - 3X - 1$ par $2X^4 - X^3 + X$.
2. Déterminer les plus grand diviseurs communs :
   (a) de $X^5 - X^4 + 3X^3 + X + 2$ et $X^4 - 2X^3 + 2X^2 - X - 2$ ;
   (b) de $X^4 + 5X^3 + 12X^2 + 19X - 7$ et $X^2 + 3X - 1$ ;
   (c) de $X^4 - 4X^3 - 9X^2 + 3X - 6$ et $X^3 - X - 7$.

1. c'est une conséquence immédiate de la caractérisation des espaces compacts par les recouvrements ouverts, une notion qui n'apparait malheureusement dans le programme de la licence qu'au S5

3. Déterminer des identités de Bézout :
   (a) pour $X^5+1$ et $X^3-1$ ;
   (b) pour $X^4-1$ et $X^2-1$ ;
   (c) pour $X^3+3X^2+3X+1$ et $X^2-1$.

**Exercice 9.** Déterminer les valeurs $a, b \in \mathbb{C}^2$ telles que $X^4+X^3+aX^2+bX+2$ soit divisible par $X^2+2$.

**Exercice 10.** Soit $\mathbb{K}$ un corps.

1. (a) Soit $a \in \mathbb{K}$. Exprimer le reste de la division euclidienne de $P \in \mathbb{K}[X]$ par $X-a$ en fonction de $P(a)$.
   (b) Soit $a \neq b \in \mathbb{K}$. Exprimer le reste de la division euclidienne de $P \in \mathbb{K}[X]$ par $(X-a)(X-b)$ en fonction de $P(a)$ et $P(b)$.
   (c) Soit $a \in \mathbb{K}$. Exprimer le reste de la division euclidienne de $P \in \mathbb{K}[X]$ par $(X-a)^2$ en fonction de $P(a)$ et $P'(a)$.
2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le reste des divisions euclidiennes de $(X-3)^{2n}+(X-2)^n-2$ par $X-2$, $X-3$, $(X-2)(X-3)$, $(X-2)^2$ et $(X-3)^2$.
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le reste des divisions euclidiennes de $(X+1)^n-X^n-1$ et $X^{2n+X^n+1}$ par $X^2-3X+2$, $X^2+X+1$ et $X^2-2X+1$.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que
      i. $\cos\big((n-1)\theta\big)X^{n+1}-\cos(n\theta)X^n-\cos(\theta)X+1$ est divisible par $X^2-2\cos(\theta)X+1$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ ;
      ii. $nX^{n+1}-(n+1)X^n+1$ est divisible par $(X-1)^2$.

**Exercice 11.** Montrer que, pour tous $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{pgcd}\big(X^{n_1}-1, X^{n_2}-1\big) = X^{\operatorname{pgcd}(n_1,n_2)}-1$.

**Exercice 12.** On définit par récurrence les polynômes de Tchebychev par

$$\begin{cases} T_0 = 1 \\ T_1 = X \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1} \end{cases}.$$

1. Calculer $T_2$, $T_3$ et $T_4$.
2. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le degré et le coefficient dominant de $T_n$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n$ et $T_{n+1}$ sont premiers entre eux.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos(n\theta) = T_n\big(\cos(\theta)\big)$.

**Exercice 13.** Donner la décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ :

1. de $X^3-3X-2$ ;
2. de $X^4+X^2+1$ ;
3. de $2X^6-3X^5+2X^4+2X^2-3X+2$ ;
4. de $2X^4-X^3-9X^2+13X-5$ ;
5. de $2X^4-10X^3+6X^2+18X$.

**Exercice 14.** Le but de cet exercice est de donner une formule algébrique pour $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

1. Donner la décomposition en facteurs irréductibles de $X^5-1$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Par identification des coefficients, en déduire que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est racine de $4X^2+2X-1$.
3. En déduire que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ et que $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$.
4. En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ et que $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$.

**Exercice 15.**

1. Soit $P := \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathbb{Q}[X]$ avec $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$, et $\frac{p}{q}$ une racine de $P$ avec $p, q \in \mathbb{Z}^*$ premiers entre eux.
   (a) Montrer que $p$ divise $a_0$.
   (b) Montrer que $p$ divise $a_n$.

2. Montrer que, pour tout $a \neq b \in \mathbb{Z}$ tels que $a+b \neq -2$, $X^3 + aX^2 + bX + 1$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

**Exercice 16.** Dans cet exercice, quand bien même $\mathbb{Z}$ n'est pas un corps, on considérera $\mathbb{Z}[X] \subset \mathbb{Q}[X]$, l'anneau des polynômes à coefficients entiers.

Pour tout polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]^*$, on appelle *contenu de* $P$, noté $c(P)$, le pgcd des coefficients de $P$. On dit de plus que $P$ est *primitif* si $c(P) = 1$.

1. (a) A l'aide des applications

$$\varphi_p : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[X] & \longrightarrow & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X] \\ \sum_{i=0}^n a_i X^i & \longmapsto & \sum_{i=0}^n \overline{a}_i X^i \end{array},$$

   définie pour tout nombre premier $p$, montrer qu'un produit de polynômes primitifs est primitif.

   (b) En déduire que, pour tous polynômes $P_1, P_2 \in \mathbb{Z}[X]^*$, on a $c(P_1.P_2) = c(P_1).c(P_2)$.

2. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$, un polynôme non irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. Montrer alors qu'il existe $Q_1, Q_2 \in \mathbb{Z}[X]$ de degrés au moins 1 tels que $P = Q_1.Q_2$.
3. (critère d'Eisenstein) Soit $P := \sum_{i=0}^n a_i X^i \in \mathbb{Z}[X]$ tel qu'il existe un nombre premier $p$ vérifiant les propriétés suivantes :
   - $p$ ne divise pas $a_n$ ;
   - $p$ divise $a_i$ pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$ ;
   - $p^2$ ne divise pas $a_0$.

   Montrer que $P$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
4. (a) Montrer que $X^3 + 9X^2 - 3X + 3$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

   (b) Montrer que, pour tout nombre premier $p$ et tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $X^n - p$ est irreductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

   (c) Montrer que, pour tout nombre premier $p$, $X^{p-1} + X^{p-2} + \ldots + X + 1$ est irreductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

**Exercice 17.** Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P'$ divise $P$.

**Exercice 18.** Soit $\mathbb{K}$ un corps et $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ des éléments deux à deux distincts.

1. Pour chaque $i \in [\![0, n]\!]$, trouver $P_i \in \mathbb{K}[X]$, un polynôme de degré $n$ s'annulant en tous les $a_j$ avec $j \in [\![0, n]\!] \setminus \{i\}$, et valant 1 en $a_i$.
2. Montrer que, pour tout $b_0, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{K}$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n$, appelé *polynôme interpolateur de Lagrange*, tel que $P(a_i) = b_i$ pour tout $i \in [\![0, n]\!]$.

**Exercice 19.** Soit $\mathbb{K}$ un corps. On rappelle la définition de

$$\xi_{\mathbb{K}} : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K}) \\ \sum_{i=0}^n a_i X^i & \longmapsto & x \mapsto \sum_{i=0}^n a_i x^i \end{array}.$$

1. Montrer que $\xi_{\mathbb{K}}$ est injective si et seulement si $\mathbb{K}$ est infini.
2. Montrer que $\xi_{\mathbb{K}}$ est surjective si et seulement si $\mathbb{K}$ est fini.

**Exercice 20.** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, $x_0 \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$f_P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0) + o\big((x - x_0)^n\big)$$

est le développement limité d'ordre $n$ de $f_P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $x_0$ si et seulement si $x_0$ est racine d'ordre au moins $n$ de $P - \sum_{i=0}^n a_i X^i$.