TD 3 : Variables aléatoires

1. 5% des interrupteurs sortant d'une chaîne de production sont défectueux. On en prend deux au hasard. Soit X la variable aléatoire nombre d'interrupteurs défectueux dans l'échantillon prélevé.

   Donner la loi de probabilité de X, tracer sa fonction de répartition et calculer $E(X)$ et $\text{Var}(X)$.

2. La distribution conjointe de deux variables aléatoires discrètes se présente comme suit :

$X\|Y$	0	1	2
10	0	0.25	0
12	0.25	0	0.25
14	0	0.25	0

   (a) déterminer les distributions marginales, puis $E(X)$ et $E(Y)$.

   (b) Déterminer $E(X.Y)$ et la covariance de X et Y.

   (c) les deux variables sont-elles indépendantes ?

3. Deux systèmes de contrôle opèrent indépendamment et sont sujets à un certain nombre de pannes.

   On donne les lois de probabilité marginales régissant le nombre de pannes par jour de chaque système :

Système X			Système Y	
x_i	$f_X(x_i)$		y_i	$f_Y(y_i)$
0	0.07		0	0.10
1	0.35		1	0.20
2	0.34		2	0.50
3	0.18		3	0.17
4	0.06		4	0.03

   (a) Donner les probabilités des événements :

   « Y a au moins 2 pannes par jour » ;

   « le nombre de pannes de X est strictement inférieur à 2 et celui de Y supérieur ou égal à 3 » ;

   « il se produit une seule panne pendant la journée » ;

   « X a le même nombre de pannes que Y ».

   (b) Déterminer la distribution conjointe de X et Y et la loi conditionnelle du nombre de pannes par jour du système X sachant que le nombre de pannes par jour du système Y est 1.

   (c) Calculer $E(X)$, $E(Y)$, $E(X+Y)$, $\text{Var}(X)$,$\text{Var}(Y)$, $\text{Var}(X+Y)$.

   (d) Quelle est la covariance de X et Y ?

4. Si $k > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-kx} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ est-elle une densité de probabilité ? Calculer son espérance, $p([-1;1])$, $p([1,3])$ et $p(]1;+\infty[)$.

5. Une variable aléatoire X a pour densité $f_X(x) = \dfrac{e^{-\frac{(x-1)^2}{4}}}{2\sqrt{\pi}}$.

   Calculer $E(X)$ et $\text{Var}(X)$.

6. Soient X et Y deux variables aléatoires de densité conjointe $f(x,y) = e^{-(x+y)}$ si $x \geq 0$ et $y \geq 0$, 0 sinon.

   Vérifier que f est une densité, donner les densités marginales $f_X(x)$ et $f_Y(y)$.

   Montrer que X et Y sont indépendantes, puis calculer $p(\{X > 2\} \cap \{Y > 3\})$ et $p(\{X > 2\} \cup \{Y > 1\})$.