Université de Genève
Section de Mathématiques
T. Smirnova-Nagnibeda

Algèbre I
Examen écrit du semestre d'hiver 2008[1]

1. Pour toutes les valeurs du paramètre $a \in \mathbb{C}$, déterminer le rang de la matrice des coefficients et trouver toutes les solutions du système linéaire

$$\begin{cases} 2x + y + az = 2 \\ 2x + ay + 2z = 3 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

2. Soit V un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$ avec une base $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$. Soit V' le dual de V et soit $\mathcal{B}' = (v_1', v_2')$ la base duale. Soit $\mathcal{D} = (v_1 + 2v_2, 3v_1 + 4v_2)$ une autre base de V. Trouver et exprimer dans la base $\mathcal{B}'$ la base de V' duale à la base $\mathcal{D}$.

3. Soit (x', y') le système de coordonnées obtenu à partir du système de coordonnées (x, y) par une rotation d'angle $\theta = 3\pi/4$ autour de l'origine dans le sens positif.
Exprimer dans le système (x, y) le point dont les coordonnées dans le système (x', y') sont $(5, 2)$.

4. Soit $\sigma \in S_7$ la permutation définie par

$$\sigma(1) = 4\ ;\ \sigma(2) = 6\ ;\ \sigma(3) = 3\ ;\ \sigma(4) = 2\ ;\ \sigma(5) = 7\ ;\ \sigma(6) = 1\ ;\ \sigma(7) = 5.$$

- Ecrire la décomposition de σ en produit de cycles à supports disjoints.
- Ecrire une décomposition de σ en produit de transpositions.
- Quelle est la signature de σ ? Justifier votre réponse.

5. Trouver l'adjoint de l'application linéaire $T \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^3)$ donnée dans la base canonique de $\mathbb{C}^3$ par la formule

$$T(x, y, z) = (x + iz, x + y + z, z)\ .$$

6. Soit l'application linéaire $T \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^3)$ donnée par la matrice

$$\begin{pmatrix} -9/25 & 4/5 & -12/25 \\ 4/5 & 0 & -3/5 \\ 12/25 & 3/5 & 16/25 \end{pmatrix}$$

exprimée dans la base canonique. Est-ce que T est hermitienne ? unitaire ? normal ?
Justifier vos réponses.

7. Soient T, S deux matrices hermitiennes. Montrer que TS est hermitienne si et seulement si T et S commutent.

[1] Attention : certaines notions mentionnées dans cet énoncé n'ont pas été vues dans le cours de l'hiver 2009

8. Soit $f \in \mathrm{End}(\mathbb{K}^4)$ donné par

$$f(u, v, w, z) \;=\; (-u + 2v,\; -2u + 3v,\; w + z,\; -2w - z)\ .$$

- Ecrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{K}4$.
- Trouver le polynôme caractéristique de f.
- Trouver les valeurs propres de f, pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
- Trouver les vecteurs propres de f correspondant aux valeurs propres de multiplicité supérieure à 1.
- Est-ce que f est triangularisable sur $\mathbb{C}$? Sur $\mathbb{R}$?
- Est-ce que f est diagonalisable sur $\mathbb{C}$? Sur $\mathbb{R}$?

Justifier vos réponses.

9. Diagonaliser la matrice

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2-2i \\ 0 & i & 0 & -4i \\ 0 & 0 & 1 & -1-i \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}\ .$$

Existe-t-il une base orthonormée de $\mathbb{C}^4$ formée de vecteurs propres de la matrice A ? Justifier votre réponse.