Université de Genève
Section de Mathématiques

Algèbre I
Corrigé de l'examen de la session automne 2007

1. On a

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y+az & = & 2 \\ 2x+ay+2z & = & 3 \\ x+y-z & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -y+(a+2)z & = & 0 \\ (a-2)y+4z & = & 1 \\ x+y-z & = & 1 \end{array}\right. \begin{array}{l} {\scriptstyle L_1-2L_3\to L_1} \\ {\scriptstyle L_2-2L_3\to L_2} \\ \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -y+(a+2)z & = & 0 \\ a^2z & = & 1 \\ x+y-z & = & 1 \end{array}\right. \begin{array}{l} \\ {\scriptstyle L_2-(a-2)L_1\to L_2} \\ \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+y-z & = & 1 \\ -y+(a+2)z & = & 0 \\ a^2z & = & 1 \end{array}\right. \begin{array}{l} \\ {\scriptstyle L_1\to L_2\to L_3\to L_1} \\ \end{array}$$

Puisque l'on passe de l'une à l'autre en faisant des opérations sur les lignes, le rang de la matrice des coefficients initiaux est égal au rang de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & a+2 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$.

Si $a \neq 0$, cette dernière est de rang 3 donc inversible. Le système admet une une unique solution

$$\left(\frac{a^2-a-1}{a^2}, \frac{a+2}{a^2}, \frac{1}{a^2}\right).$$

Si $a=0$, alors la matrice et de rang 2. Dans ce cas, la dernière équation devient $0=1$ et le système n'admet alors aucune solution.

Cours/Rappel pour l'exercice 2. Soit V un $\mathbb{K}$–espace vectoriel de dimension finie. On appelle espace dual à V, noté V', l'ensemble des applications linéaires de V dans $\mathbb{K}$ muni de sa structure de $\mathbb{K}$–espace vectoriel.

On a $\dim(V') = \dim(V)$ et toute base $(v_1, \ldots, v_n)$ de V induit une base $(v'_1, \ldots, v'_n)$ de V' où, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, v'_i est l'application donnant le $i^{\text{ème}}$ coefficient dans la base $(v_1, \ldots, v_n)$ *i.e.*

$$\forall (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n, v'_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_j.v_j\right) = a_i.$$

2. Posons $\mathbb{D} = (w_1, w_2)$ avec $w_1 = v_1 + 2v_2$ et $w_2 = 3v_1 + 4v_2$. On a alors $v_1 = w_2 - 2w_1$ et $v_2 = \frac{3}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2$.

Pour tout $x \in V$, on a, par définition,

$$x = w'_1(x).w_1 + w'_2(x).w_2.$$

Mais on a également

$$\begin{array}{rcl} x & = & v'_1(x).v_1 + v'_2(x).v_2 \\ & = & v'_1(x).(w_2 - 2.w_1) + v'_2(x).(3/2.w_1 - 1/2.w_2) \\ & = & \big(3/2.v'_2(x) - 2.v'_1(x)\big).w_1 + \big(v'_1(x) - 1/2.v'_2(x)\big).w_2. \end{array}$$

Par unicité des coefficients, on a donc $w'_1 = 3/2.v'_2 - 2.v'_1$ et $w'_2 = v'_1 - 1/2.v'_2$.

3. Par définition de (x', y'), on a

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} \cos(3\pi/4) & -\sin(3\pi/4) \\ \sin(3\pi/4) & \cos(3\pi/4) \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Les coordonnées de $5x' + 2y'$ dans le système (x, y) sont donc

$$A^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-7\sqrt{2}}{2} \\ \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

4. On a

$$1 \xrightarrow{\sigma} 4 \xrightarrow{\sigma} 2 \xrightarrow{\sigma} 6 \xrightarrow{\sigma} 1, \quad 3 \xrightarrow{\sigma} 3 \quad \text{et} \quad 5 \xrightarrow{\sigma} 7 \xrightarrow{\sigma} 5.$$

La décomposition de σ en produit de cycles disjoints est donc $(1426)(57)$.

Pour obtenir une décomposition en transpositions, il suffit de décomposer (1426). Or, pour toute suite finie $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}^*$ d'éléments distincts, on a $(a_1 \cdots a_n) = (a_1 a_n)(a_1 a_{n-1}) \cdots (a_1 a_2)$. On a donc $\sigma = (16)(12)(14)(57)$.

D'après ce qui précède, σ admet une décomposition en un nombre pair de transposition, sa signature est donc 1.

Cours/Rappel pour l'exercice 5. Pour toute application linéaire $T \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$, on définit son adjoint comme l'unique application linéaire $T^* \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$ vérifiant pour tout $x, y \in \mathbb{K}^n$, $< T(x), y >=< x, T^*(y) >$ où $< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$ représente le produit hermitien usuel.

Si A est la matrice de T dans une base $\mathcal{B}$ donnée, alors la transposé de la conjugué ${}^t\overline{A}$ est la matrice de T^* dans cette base $\mathcal{B}$.

Si l'on travaille dans $\mathbb{R}$, les définitions ci-dessus restent valable mais la conjugaison agit alors trivialement et le produit hermitien devient un produit scalaire.

5. Dans la base canonique, la matrice de T est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice de T^* dans cette base est donc $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -i & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et on a $T^*(x, y, z) = (x + y, y, y + z - ix)$.

6. Soit A la matrice de T dans la base canonique.

On a $A^* = \begin{pmatrix} -9/25 & 4/5 & 12/25 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \\ -12/25 & -3/5 & 16/25 \end{pmatrix} \neq A$, l'endomorphisme T n'est donc pas hermitien.

Par calcul, on a $AA^* = \mathbb{1}_3$, l'application est donc unitaire, ce qui implique qu'elle soit également normal puisqu'alors $T^*T = \mathbb{1}_3 = TT^*$.

7. Soit T et S deux matrices hermitiennes de même taille. On a alors

$$\begin{aligned} TS \text{ hermitienne} &\Leftrightarrow (TS)^* = TS \\ &\Leftrightarrow S^*T^* = TS \\ &\Leftrightarrow ST = TS, \end{aligned}$$

la dernière ligne venant de ce que T et S sont hermitiennes.

8. La matrice de f dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de f est

$$\chi_f(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \big((-1-\lambda)(3-\lambda)+4\big)\big((1-\lambda)(-1-\lambda)+2\big)$$

en faisant le calcul par blocs. Au final, cela donne $\chi_f(\lambda) = (\lambda^2+1)(\lambda-1)^2$.

Dans $\mathbb{R}$, ce polynôme n'est pas scindé puisqu'il possède un facteur irréductible de degré 2. L'endomorphisme f admet donc 1 comme valeur propre réelle mais n'est pas triangularisable dans $\mathbb{R}$ et, de fait, pas diagonalisable non plus.

Plaçons-nous maintenant dans $\mathbb{C}$. On a alors $\chi_f(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-i)(\lambda+i)$. Les valeurs propres complexes de f sont donc toujours 1 avec une multiplicité égale à 2, mais aussi i et $-i$ avec multiplicité 1.

Cherchons les vecteurs propres associés à 1. Ils correspondent aux solutions non triviales du système

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Les solutions sont toutes de la forme $(a, a, 0, 0)$ avec $a \in \mathbb{C}^*$. L'espace propre associé à 1 est donc de dimension 1 alors que 1 apparait avec une multiplicité 2 dans $\chi_f(\lambda)$. L'endomorphisme f n'est donc pas diagonalisable. Par contre, il est triangularisable sur $\mathbb{C}$ puisque $\chi_f(\lambda)$ est scindé sur $\mathbb{C}$ [1].

9. La matrice A étant triangulaire, ses valeurs propres se lisent sur sa diagonale. Elles sont donc i, $-i$ et enfin 1 avec multiplicité 2.

Il est clair que $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$ et $(0, 0, 1, 0)$ vont être vecteurs propres associés, respectivement, à 1, à i et à 1. Cherchons maintenant un vecteur propre associé à $-i$. Pour cela, on cherche une solution non triviale au système

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2-2i \\ 0 & i & 0 & -4i \\ 0 & 0 & 1 & -1-i \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1+i & 0 & 0 & -2-2i \\ 0 & 2i & 0 & -4i \\ 0 & 0 & 1+i & -1-i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (1+i)u = (2+2i)z \\ 2iv = 4iz \\ (1+i)w = (1+i)z \end{array} \right. .$$

[1] plus généralement, tout polynôme est scindé sur $\mathbb{C}$, donc tout endomorphisme est triangularisable sur $\mathbb{C}$

On pourra prendre $(2,2,1,1)$. On pose alors $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et l'on a

$$A = G \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} G^{-1}.$$

Diagonaliser A, cela correspond justement à trouver une base formée de veteurs propres de A.