Algèbre I

Examen 30.01.2009

1. Calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Trouver la matrice inverse A^{-1} .

2. Déterminer le rang de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & -3 \\ 6 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Quelles sont les dimensions de $\text{Im}(A)$ et $\text{Ker}(A)$?
Déterminer le noyau de A .

3. Vérifier que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 1 & i \\ 0 & -i & 1 \end{pmatrix}$$

est une matrice hermitienne.

Calculer les valeurs propres de A .

Trouver une base orthonormale de $\mathbb{C}^3$ formée de vecteurs propres de A .

Donner une matrice unitaire qui diagonalise la matrice A .

4. Déterminer, selon les valeurs des paramètres s et t , toutes les solutions du système linéaire d'inconnus x , y et z suivant

$$\begin{array}{rclclcl} x & + & y & - & (1+s)z & = & 1 \\ -2x & + & (1+t)y & + & 2z & = & 1+t \\ x & - & 2y & - & (1-s)z & = & -2 \end{array}$$

5. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 7 & -12 \\ 0 & 4 & -7 \end{pmatrix}.$$

Quelles sont les multiplicités géométriques et algébriques des valeurs propres de A ?
Trouver un vecteur adjoint et déterminer la forme de Jordan de A .

6. Une matrice carrée A de taille n est dite à diagonale dominante si elle vérifie $|A_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |A_{i,j}|$ pour tout $i = 1, \dots, n$. Montrer qu'une telle matrice possède un noyau trivial. En déduire qu'elle est inversible.