Université de Genève
Section de Mathématiques

Algèbre I
Examen 30.01.2009, corrigé

1. En permutant d'abord les 3^{ème} et 4^{ème} colonnes, puis en permutant cycliquement les trois premières puis les trois dernières, on obtient

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} \\ &= -6! = -120 \neq 0 \end{aligned}$$

La matrice A est donc inversible. Pour obtenir A^{-1} , il suffit d'appliquer les mêmes opérations sur les colonnes de la matrice identité, puis de diviser la $i^{\text{ème}}$ colonne par i , pour i allant de 1 à 6. On obtient alors

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

2. Pour déterminer le rang de A , on opère sur ses lignes de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & -3 \\ 6 & -1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $\text{rg}(A) = \dim(\text{Im}(A)) = 2$. Or, d'après le théorème du rang, $\text{rg}(A) + \dim(\text{Ker}(A)) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$, il s'ensuit $\dim(\text{Ker}(A)) = 1$. Le noyau de A est donc engendré par n'importe lequel de ses éléments non nuls. Par ailleurs, la somme des coefficients de A sur chaque ligne est nulle, on en conclut que $(1, 1, 1)$ est dans le noyau et ainsi $\text{Ker}(A) = \{(\lambda, \lambda, \lambda) | \lambda \in \mathbb{R}\}$.

3. Par calcul direct, on a ${}^t\overline{A} = A$, la matrice A est donc bien hermitienne.

En notant χ_A le polynôme caractéristique de A et en développant selon la première ligne, on obtient

$$\begin{aligned}\chi_A(X) &= \begin{vmatrix} 1-X & i & 0 \\ -i & 1-X & i \\ 0 & -i & 1-X \end{vmatrix} = (1-X) \begin{vmatrix} 1-X & i \\ -i & 1-X \end{vmatrix} - i \begin{vmatrix} -i & i \\ 0 & 1-X \end{vmatrix} \\ &= (1-X)((1-X)^2 - 1) - i(-i(1-X)) = (1-X)((1-X)^2 - 2) \\ &= (1-X)(1 + \sqrt{2} - X)(1 - \sqrt{2} - X).\end{aligned}$$

Les valeurs propres de A sont donc 1 et $1 \pm \sqrt{2}$.

Puisque A est hermitienne, deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes seront nécessairement orthogonaux. Il suffit donc de trouver, pour chacune des 3 valeurs propres, un vecteur propre unitaire. Pour cela, on résout les trois systèmes suivants :

$$\begin{aligned}- A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + iy = x \\ -ix + y + iz = y \\ -iy + z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases} \\ - A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= (1 + \sqrt{2}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} iy = \sqrt{2}x \\ i(z - x) = \sqrt{2}y \\ -iy = \sqrt{2}z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{i}{\sqrt{2}}y \\ z = \frac{-i}{\sqrt{2}}y \end{cases} \\ - A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= (1 - \sqrt{2}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} iy = -\sqrt{2}x \\ i(z - x) = -\sqrt{2}y \\ -iy = -\sqrt{2}z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-i}{\sqrt{2}}y \\ z = \frac{i}{\sqrt{2}}y \end{cases}\end{aligned}$$

On peut donc prendre, par exemple, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{i}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-i}{2}\right), \left(\frac{-i}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{i}{2}\right)$.

On pose maintenant

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{2} & \frac{-i}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{2} & \frac{i}{2} \end{pmatrix}.$$

D'après ce qui précède, les colonnes de cette matrice forme une base orthonormale de $\mathbb{C}^3$, P est donc unitaire. De plus, ce sont des vecteurs propres de A , P diagonalise donc A , *i.e.* la matrice $P^{-1}AP$ est diagonale.

4. Commençons par rendre le système d'équations échelonné.

$$\begin{cases} x + y - (1 + s)z = 1 \\ -2x + (1 + t)y + 2z = 1 + t \\ x - 2y - (1 - s)z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - (1 + s)z = 1 \\ (3 + t)y - 2sz = 3 + t \\ -3y + 2sz = -3 \end{cases} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - (1 + s)z = 1 \\ (3 + t)y - 2sz = 3 + t \\ ty = t \end{cases} \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array}$$

Il faut maintenant distinguer plusieurs cas :

a) $t \neq 0$: on a alors $y = 1$ et le système devient

$$\begin{cases} x - (1 + s)z = 0 \\ sz = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

Là encore, il faut distinguer deux cas :

a.1) $s \neq 0$: alors $(0, 1, 0)$ est l'unique solution du système ;

a.2) $s = 0$: l'ensemble des solutions est alors $\{(\lambda, 1, \lambda) | \lambda \in \mathbb{R}\}$;

b) $t = 0$: le système devient

$$\begin{cases} x + y - (1 + s)z = 1 \\ 3y - 2sz = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (1 + \frac{1}{3}s)z \\ y = \frac{2}{3}sz + 1 \end{cases},$$

on peut donc se servir de z comme paramètre libre et l'ensemble des solutions est alors $\{((3 + s)\lambda, 2s\lambda + 1, 3\lambda) | \lambda \in \mathbb{R}\}$.

5. On commence par calculer χ_A le polynôme caractéristique de A . Cela donne

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= \begin{vmatrix} 1 - X & 2 & -3 \\ 0 & 7 - X & -12 \\ 0 & 4 & -7 - X \end{vmatrix} = (1 - X) \begin{vmatrix} 7 - X & -12 \\ 4 & -7 - X \end{vmatrix} \\ &= (1 - X)((X - 7)(X + 7) + 48) = (1 - X)(X^2 - 1) = -(X - 1)^2(X + 1). \end{aligned}$$

Les valeurs propres de A sont donc 1 et -1 avec une multiplicité algébrique respectivement égale à 2 et à 1.

Concernant la multiplicité géométrique, celle de -1 est nécessairement égale à 1.

Pour 1, il faut résoudre le système

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = x \\ 7y - 12z = y \\ 4y - 7z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 3z \\ y = 3z \\ y = 2z \end{cases} \Leftrightarrow y = z = 0.$$

L'espace propre associé à 1 est donc engendré par $(1, 0, 0)$, donc de dimension 1. La multiplicité géométrique de 1 est donc 1.

Il n'y a donc pas égalité entre multiplicité algébrique et multiplicité géométrique. La matrice A n'est donc pas diagonalisable et, dans sa forme de Jordan, le seul bloc

de taille 2, celui associé à 1, ne peut pas être diagonal. La forme de Jordan de A est

$$\text{donc } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Soit A une matrice de taille n à diagonale dominante et soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \text{Ker}(A)$. On choisit $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que, quelque soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|x_i| \leq |x_{i_0}|$. On suppose par l'absurde que $x \neq 0$ ou, autrement dit, que $x_{i_0} \neq 0$. On a alors $(Ax)_{i_0} =$

$$\sum_{i=1}^n A_{i_0,i} x_i = 0 \text{ et donc } A_{i_0,i_0} x_{i_0} = - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^n A_{i_0,i} x_i. \text{ Or}$$

$$\left| \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^n A_{i_0,i} x_i \right| \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^n |A_{i_0,i} x_i| \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^n |A_{i_0,i}| |x_{i_0}| = |x_{i_0}| \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^n |A_{i_0,i}| < |A_{i_0,i_0}| |x_{i_0}|,$$

ce qui contredit l'égalité précédente. Donc $x = 0$ et le noyau de A est trivial. En particulier A est inversible.