Université de Genève
Section de Mathématiques
A. Alekseev

Algèbre I
Exercices 1.

1. Résoudre les systèmes linéaires suivants en utilisant la méthode de Gauss:

a) $\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 5, \\ 3x & - & 2y & = & 0. \end{array}$

b) $\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0, \\ x & + & & & z & = & 2, \\ & & y & - & z & = & -3. \end{array}$

c) $\begin{array}{rcrcl} x & + & 2y & = & 1, \\ 2x & + & y & = & 1, \\ x & - & y & = & 2. \end{array}$

d) $\begin{array}{rcrcl} x & + & 2y & = & 1, \\ 2x & + & y & = & 1, \\ x & - & y & = & 0. \end{array}$

2. Pour quelles valeurs du paramèmtre $a \in \mathbb{R}$ le système linéaire

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 3y & - & 2z & = & 4, \\ 3x & - & 4y & - & 9z & = & 5, \\ 4x & - & 7y & + & (a^2-20)z & = & a+6. \end{array}$$

a-t-il
a) exactement une solution?
b) aucune solution?
c) une infinité de solutions?
Lorsqu'il y a des solutions, les calculer.

3. Présenter les expressions suivantes sous la forme $x + iy$ (la partie réelle plus la partie imaginaire):

$$(1+3i)(2-3i) \quad , \quad \frac{1+i}{1-i} \quad , \quad \frac{1-2i}{1+i} \quad .$$

4. Trouver les racines (réelles et complexes) des polynômes suivants:

$$p(z) = z^2 + z + 1 \quad , \quad p(z) = z^3 - 1.$$

5. Vérifier les axiomes de corps pour les nombres complexes.