Université de Genève
Section de Mathématiques
A. Alekseev

Algèbre I
Exercices 10.

1. Calculer le déterminant de la matrices suivante

$$A = \begin{pmatrix} 101 & 102 & 103 & 104 & 105 \\ 732 & 85 & 84 & 985 & 373 \\ 176 & 177 & 178 & 179 & 180 \\ 423 & 975 & -58 & 199 & 199 \\ 359 & 360 & 361 & 362 & 363 \end{pmatrix} .$$

2. Pour quelles valeurs des paramètres u et v le système linéaire en les inconnues x, y, z

$$\begin{cases} ux + y + z = 0 \\ uvy + 2z = 0 \\ -ux + (uv-1)y + (v+1)z = 1 \end{cases}$$

possède-t-il aucune solution, une unique solution, une famille à un paramètre libre de solutions, une famille à deux paramètres libres de solutions?

3. Calculer la matrice des cofacteurs et la matrice inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 14 \end{pmatrix} .$$

Résoudre le système linéaire $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ où $\mathbf{b} = (1, 1, 1)$. Trouver le vecteur $\mathbf{x}$ en utilisant les formules de Cramer.

4. Calculer le déterminant de la matrice suivante

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} .$$

5. *La décompostion de Gauss* est la présentation d'une matrice n par n comme produit d'une matrice triangulaire inférieure B et d'une matrice trinagulaire supérieure C telle que $C_{i,i} = 1$ pour tout i. Par exemple, pour des matrices 2 par 2 on a

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Trouver les condition nécessaires et suffisantes sur les éléments matriciels a, b, c, d pour que la décomposition de Gauss soit unique.