Université de Genève
Section de Mathématiques
A. Alekseev

Algèbre I
Exercices 11.

1. Utiliser la méthode de Gauss pour trouver le rang des matrices suivantes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -6 & 5 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \\ 4 & -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Calculer le déterminant de la martice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

3. Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 19 & 26 & 33 \\ 29 & 40 & 51 \end{pmatrix}$. Sachant que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ pouvez-vous décider sans calcul si A est de rang 3?

4. Soit A une matrice n par n telle que $A^2 = A$.

a) Vérifier que $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Ker}(I_n - A)$ et $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Im}(I_n - A)$.

b) Montrer que l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ est la somme directe de $\mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$, $\mathbb{K}^n = \mathrm{Ker}(A) \oplus \mathrm{Im}(A)$.

5. Soit $B \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice n par n à coefficients réels telle que $B^2 = I_n$. Posons $A = \frac{1}{2}(I_n - B)$.

a) Montrer que $A^2 = A$.

b) Vérifier que $B \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathrm{Ker}(A)$ et $B \cdot \mathbf{x} = -\mathbf{x}$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathrm{Im}(A)$.

6. Soit $n \geq 1$ et $a \in M_n(\mathbb{K})$.

a) Si $a^2 = 0$, montrer que $I_n + a$ est inversible, et que $(I_n + a)^{-1} = I_n - a$. Vérifier que $(I_n + a)^k = I_n + ka$ pour tout entier k. Calculer $\det(I_n + a)$.

b) Si $a^3 = 0$, montrer que $I_n + a$ est inversible et trouver une formule pour $(I_n + a)^{-1}$.

c) En supposant que $a^k = 0$ pour $k \geq 2$, montrer que $I_n + a$ est inversible et trouver une formule pour $(I_n + a)^{-1}$.