Université de Genève
Section de Mathématiques
A. Alekseev

Algèbre I
Exercices 12.

1. Trouver la solution générale du système linéaire inhomogène

$$\begin{aligned}x + z &= 2 \\x + 2y + 3z + t &= 4 \\2x + z + t &= 3\end{aligned}$$

2. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice de valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ distinctes deux à deux. Ecrire la liste des valeurs propres de A^2 , de $A^3 - A + 3I_n$ et (lorsque A est inversible) de A^{-1} .

4. Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et A une matrice donnée par la formule suivante

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Trouver une matrice inversible $g \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$ telle que la matrice $g^{-1}Ag$ soit diagonale.

5. Pour tout entier $n \geq 1$, soit $A_n \in M_n(\mathbb{C})$ avec les éléments matriciels $(A_n)_{i,j} = 1$ si $|i - j| = 1$ et $(A_n)_{i,j} = 0$ dans tous les autres cas, et soit $p_n(\lambda)$ son polynôme caractéristique.

a) Calculer $p_1(\lambda)$ et $p_2(\lambda)$.

b) Etablir une relation linéaire entre $p_n(\lambda)$, $p_{n-1}(\lambda)$ et $p_{n-2}(\lambda)$ pour tout $n \geq 3$.

c) Calculer $p_3(\lambda)$ et $p_4(\lambda)$.