Université de Genève
Section de Mathématiques
A. Alekseev

Algèbre I
Exercices 13.

1. Est-ce que les matrices suivantes sont diagonalisables?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

2. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad .$$

3. Calculer A^{100} pour la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad .$$

4. Soient $t \in \mathbb{R}$ et

$$a) \;\; A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad , \qquad b) \;\; A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Calculer $\exp(tA)$.

5. *(Théorème de Cayley-Hamilton)* Soient A une matrice complexe et $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ son polynôme caractéristique. Montrer que $p_A(A) = 0$.

Indication. Utiliser la forme de Jordan.