Université de Genève
Section de Mathématiques
A. Alekseev

Algèbre I
Exercices 14.

1. Calculer les valeurs propres λ_1 et λ_2 de la matrice hermitienne

$$a) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad b) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad .$$

Trouver la matrice unitaire g telle que $A = g\Lambda g^{-1}$ où

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad .$$

2. Diagonaliser les formes quadratiques suivantes

$$a) \quad f(x,y) = x^2 + 3xy + y^2 \quad , \quad b) \quad f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz \quad .$$

3. Vérifier que la matrice

$$g = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$$

est unitaire. Trouver ses valeurs propres.

4. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres
de la matrices symétrique n par n

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -2 \end{pmatrix} \quad .$$

5. *(Problème de Horn)*
Soient A, B et C trois matrices hermitiennes 2 par 2 telles que $A + B + C = 0$.
Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 \geq \lambda_2$,
les valeurs propres de B sont $\mu_1 \geq \mu_2$, et les valeurs
propres de C sont $\nu_1 \geq \nu_2$.

a) Monrter que $\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2 + \nu_1 + \nu_2 = 0$.
Indication. Calculer la trace de la matrice $A + B + C$.

b) Montrer que $\lambda_1 + \mu_1 + \nu_2 \geq 0$.

Indication. Utiliser les formes quadratiques des matrices A, B et C.