Université de Genève
Section de Mathématiques
A. Alekseev

Algèbre I
Exercices 3.

1. Résoudre le système linéaire

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2. La suite de Fibonacci $\{x_n\}_{n\geq 0}$ est définie par $x_0 = 1, x_1 = 1$ et par

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$$

pour tout $n \geq 2$.

Montrer par récurrence que

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right)$$

pour tout $n \geq 0$.

3. Calculer

$$(1 \ 2 \ 3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

4. Résoudre les systèmes linéaires suivants en utilisant la matrice inverse:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

5. Dans le jeu des tours de Hanoi, le matériel consiste en n disques de carton de rayons distincts deux à deux et trois piquets verticaux A, B et C. Les disques sont trouées en leurs centres et peuvent être empilés sur les piquets, toujours par ordre de rayons décroissants: le plus grands disque au bas de chaque tours et le plus petit en haut.

Le jeu commence avec les n disques empilés sur le piquet A, et le joueur doit les déplacer sur le piquet B en un minimum de coups. Chaque coup consiste en le mouvement d'un disque d'un piquet à un des deux autres, il ne faut pas jamais poser un disque sur un disque plus petit.

Combien de coup faut-il? Soit T_n la solution du problème pour n disques. Trouver une relation entre T_n et T_{n+1}, deviner la formule générale de T_n, et achever par récurrence sur n.