

Université de Genève
Section de Mathématiques
A. Alekseev

Algèbre I
Exercices 4.

1. Est-ce que les matrices suivantes sont inversibles? Calculer les matrices inverses.

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Résoudre le système linéaire suivant en utilisant la matrice inverse

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Soient A et B deux matrices 2 par 2. Vérifier que

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \det(B).$$

5. Utiliser le raisonnement par l'absurde pour montrer que $\sqrt{3}$ est un nombre irrationnel.