**Université de Genève**
**Section de Mathématiques**
A. Alekseev

**Algèbre I**
**Exercices 5.**

**1. Vérifier que la matrice**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**est nilpotente. Montrer que toutes les matrices de la forme**

$$\begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**sont nilpotentes.**

**2. Dans l'espace vectoriel** $V$ **des fonctions polynômiales** $p(x) = a + bx + cx2 + dx3$ **avec** $a, b, c, d \in \mathbb{R}$**, on considère les sous-ensembles définis par les conditions suivantes:**
**a)** $p$ **est de degré 3** ($d \neq 0$)**,**
**b)** $p(2) = 3p(4)$**,**
**c) la dérivée** $p'(x)$ **de** $p(x)$ **est paire** ($p'(-x) = p'(x)$)**,**
**d)** $p(2) = 0$**,**
**e)** $p(2) = 1$**,**
**f)** $xp'(x) = p(x)$ **pour tout** $x \in \mathbb{R}$**,**
**g)** $p(1 - x) = p(x)$ **pour tout** $x \in [0, 1]$**.**

**Sont-ils des sous-espaces vectoriels de** $V$**?**

*Définition.* Soit $A$ une matrice $n$ par $n$. On dit que $A$ est triangulaire (supérieure) si $A_{i,j} = 0$ pout tous $i > j$.

**3.** Calculer la matrice inverse $A^{-1}$ pour

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**4.** Montrer que le produit de deux matrices triangulaires est une matrice triangulaire.

**5.** Montrer qu'une matrice triangulaire est inversible si et seulement si tous ses éléments diagonaux sont non nuls ($A_{i,i} \neq 0$ pour tout $i$).

**6.** Trouver tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}2$.