Université de Genève
Section de Mathématiques
A. Alekseev

Algèbre I
Exercices 6.

1. Les ensembles des vecteurs suivants sont-ils linéairement indépendants?

- a) $F = \{e_1, e_2, e_3\}$
b) $F = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$

où

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Quelles sont les nombres $a \in \mathbb{R}$ tels que $\{(1+a, 1-a), (1-a, 1+a)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$?

3. Soit A une matrice n par n inversible à valeurs dans un corps $\mathbb{K}$. Montrer que les lignes de A , $a_i = (a_{i,1}, \dots, a_{i,n}), i = 1, \dots, n$ forment une base de $\mathbb{K}^n$.

4. Soit V le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ formé des vecteurs dont la somme des coordonnées relativement à la base canonique est nulle

$$V = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; \sum_{i=1}^n x_i = 0\}.$$

Ecrire une base de V .

Suggestion. Commencer par le cas de $n = 3$.

5. Dans l'espace V_n des fonctions polynomiales $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de degré au plus n , montrer que

a) les polynômes de Legendre

$$P_k(x) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dx^k} ((x^2 - 1)^k), \quad k = 1, \dots, n$$

b) les polynômes d'Hermite

$$H_k(x) = e^{x^2/2} \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dx^k} (e^{-x^2/2}), \quad k = 1, \dots, n$$

constituent une base.