Algèbre I
Exercices 7.

1. Etant donné un espace vectoriel V de dimension finie et un sous-espace vectoriel U de V , on considère les assertions suivantes. Sont-elles correctes?

- a) Toute famille génératrice de V peut être complétée en une base;
- b) toute famille libre de V peut être complétée en une base;
- c) de toute famille génératrice de V , on peut extraire une base;
- d) de toute famille libre de V , on peut extraire une base;
- e) de toute famille génératrice de V , on peut extraire une famille génératrice de U ;
- f) toute famille de U libre dans U est libre dans V ;
- g) toute base de U peut être complétée en une base de V .

2. Montrer que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

définit un changement de base dans $\mathbb{R}^3$. Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base obtenue par l'application de A à la base canonique. Exprimer le vecteur $x = (1, -1, 1)$ dans la nouvelle base.

3. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le sous-espace vectoriel des vecteurs de la forme $(x, 0, 0)$, et de même les sous-espaces U_2, U_3 , ainsi que le sous-espace $U_{1,2}$ des vecteurs de la forme $(x, y, 0)$, et de même les sous-espaces $U_{1,3}, U_{2,3}$. Indiquer lesquelles des relations suivantes sont correctes.

- a) $U_1 + U_2 = U_{1,2}$
- b) $U_1 + U_{2,3} = \mathbb{R}^3$
- c) $U_{1,2} + U_{2,3} = \mathbb{R}^3$
- d) $U_1 \oplus U_2 = U_{1,2}$
- e) $U_1 + U_2 + U_3 = \mathbb{R}^3$
- f) $U_{1,2} \oplus U_{2,3} = \mathbb{R}^3$

4. Déterminer les rangs des matrices suivantes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

5. Pour $k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, on note f_k la fonction polynomiale définie par

$$f_k(x) = \frac{\prod_{j \neq k} (x - j)}{\prod_{j \neq k} (k - j)},$$

par exemple $f_{-2}(x) = \frac{1}{24}(x+1)x(x-1)(x-2)$. Calculer $f_k(l)$ pour $k, l \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ et montrer que $\{f_{-2}(x), f_{-1}(x), f_0(x), f_1(x), f_2(x)\}$ est une base de l'espace vectoriel V_4 des fonctions polynomiale de degré au plus 4.