Université de Genève
Section de Mathématiques
A. Alekseev

Algèbre I
Exercices 8.

1. Calculer les éléments suivants dans le groupe symétrique:

a) $(132)^{-1}$, $(321)^{-1}$, $132 \cdot 321$;
b) $(2143)^{-1}$, $(3214)^{-1}$, $2143 \cdot 3214$.

Trouver $\mathrm{sign}(\sigma)$ **pour tous ces éléments.**

2. Calculer les déterminats des matrices suivantes:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} .$$

3. Est-ce que le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} 97 & 81 & 101 \\ 1193 & 1200 & 1999 \\ 2003 & 15 & 2017 \end{pmatrix}$$

est divisible par 3?

4. Soit $\sigma = 21453 \in S_5$.

a) Quel est le plus petit entier $k \geq 1$ tel que σ^k soit la transformation identique, $\sigma^k = 12345$?
b) Trouver tous les éléments $\tau \in S_5$ tels que $\sigma\tau = \tau\sigma$.

5. Montrer l'identité $(12)(23)(12) = (23)(12)(23)$ dans le groupe symétrique S_3.

6. Montrer que les matrices triangulaires supérieures inversibles forment un groupe par rapport au produit matriciel.

7. *Le déterminant de Vandermonde* est défini par la formule suivante:

$$\Delta_n(x_1, \ldots, x_n) = \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1 2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2 2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3 2 & \ldots & x_3^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & x_n 2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} .$$

a) Montrer que $\Delta_n(x_1, \ldots x_n) = \left(\prod_{j=2}^n (x_j - x_1) \right) \Delta_{n-1}(x_2, \ldots, x_n)$.
Indication. Soustraire à la dernière colonne x_1 fois l'avant-dernière, puis à l'avant-dernière x_1 fois la colonne numero $n-2$, et ainsi de suite $n-1$ fois. Puis développer selon la première ligne.

Montrer que

$$\Delta_n(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$