Université de Genève
Section de Mathématiques
A. Alekseev

Algèbre I
Exercices 9.

1. Calculer les déterminants des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 30 & 31 & 32 \\ 33 & 34 & 35 \\ 36 & 37 & 38 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 53 & 59 & 61 \\ 67 & 71 & 73 \\ 79 & 83 & 89 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

2. Vérifier la relation $(12)(23)(12) = (23)(12)(23)$ **dans le groupe symétrique** S_3**.**

3. Calculer la signature de la permutation $\sigma = n(n-1)\dots 21 \in S_n$ $(\sigma(i) = n - i + 1)$.

4. Calculer le déterminant de la matrice n par n

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & c_1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & c_2 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & c_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & c_n \end{pmatrix} \quad .$$

Pour $x \in \mathbb{K}$, calculer le déterminant de la matrice $A(x) = A + xI_n$.

5. Pour tout entier $n \geq 1$ soit A_n la matrice n par n avec les éléments matriciels $(A_n)_{i,j} = 2$ si $i = j$, $(A_n)_{i,j} = 1$ si $i = j - 1$ ou $i = j + 1$, et $(A_n)_{i,j} = 0$ dans tous les autres cas.
Par exemple,

$$A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad .$$

a) Calculer $\det(A_n)$ pour $n = 1, 2$.
b) Trouver une relation linéaire entre $\det(A_n)$, $\det(A_{n-1})$ et $\det(A_{n-2})$ pour $n \geq 3$.
c) Calculer $\det(A_{10})$.