Université de Genève
Section de Mathématiques

Algèbre I
Corrigé 1.

Série 4, ex. 5

Supposons par l'absurde que $\sqrt{3}$ est rationnel. On peut alors l'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$ avec p et q des entiers premiers entre eux. En élevant au carré, on obtient $p^2 = 3q^2$, ce qui implique que 3 divise p^2. Mais alors, 3 divise également p. En effet, si $p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$ est la décomposition en facteurs premiers de p, alors $p_1^{2k_1} \cdots p_r^{2k_r}$ est celle de p^2 et de fait, si 3 apparait comme facteur premier de p^2, c'est qu'il apparaissait déjà comme facteur premier de p. On peut donc écrire $p = 3p'$ avec $p' \in \mathbb{N}$.

Mais alors, on a $9{p'}^2 = 3q^2$ ou encore $3{p'}^2 = q^2$. Cela signifie que 3 divise q^2 et donc, pour les même raisons que ci-dessus, que 3 divise q. Les entiers p et q ont donc 3 comme diviseur commun, ce qui est absurde puisqu'ils ont été choisis premiers entre eux.

Le réel $\sqrt{3}$ n'est donc pas rationnel.

Série 5, ex. 5

1$^{\text{ère}}$ méthode :

Une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Or le déterminant d'une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) est égal au produit de ses coefficients diagonaux. Donc, pour qu'une matrice triangulaire soit inversible il faut et il suffit que chacun de ses coefficients diagonaux soit non nul.

2$^{\text{nde}}$ méthode (plus élémentaire) :

Soit A une matrice triangulaire supérieure de taille $n \in \mathbb{N}^*$. Le cas d'une matrice triangulaire inférieure pourra se traiter de façon similaire.

Supposons que le $i^{\text{ème}}$ coefficient diagonal de A est nul. Les i premières colonnes de A n'ont donc que les $i-1$ premiers coefficients non nuls et peuvent, de fait être vu comme des vecteurs de $\mathbb{R}^{i-1} \subset \mathbb{R}^n$. Mais i vecteurs dans un espace de dimension $i-1$ sont nécessairement liés. Il existe donc une relation linéaire non triviale entre les colonnes de A, qui ne peut donc pas être inversible.

Réciproquement, supposons que A est non inversible. Alors, en notant $c_1, \ldots, c_n$ les colonnes de A, il existe une relation linéaire non triviale

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_i = 0$$

avec $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. On pose

$$i_0 = \max\big\{i \in [\![1, n]\!] | \alpha_i \neq 0 \text{ et } \alpha_k = 0 \text{ pour tout } k > i\big\}.$$

On a alors

$$c_{i_0} = \frac{1}{\alpha_{i_0}} \sum_{i=1}^{i_0-1} \alpha_i c_i.$$

Mais puisque A est triangulaire supérieure, les $i_0^{\text{ème}}$ coefficients des termes de droite sont tous nuls. Il en va donc de même pour le $i_0^{\text{ème}}$ coefficient de c_{i_0}, *i.e.* le $i_0^{\text{ème}}$ coefficient diagonal de A.

On a donc prouvé

$$A \text{ non inversible} \Leftrightarrow A \text{ possède un coefficient diagonal nul},$$

ce qui est équivalent à

$$A \text{ inversible} \Leftrightarrow \text{tous les coeffcients diagonaux de } A \text{ sont non nuls.}$$

Série 6, ex. 3

Montrons que la famille $\mathcal{F} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ est libre. Pour cela, considérons une relation linéaire

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i = 0$$

avec $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Cette relation peut s'écrire

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)A = 0$$

(le vérifier en faisant le calcul). Or la matrice A est inversible. On a donc $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)AA^{-1} = 0$ et donc $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.

La famille $\mathcal{F}$ est donc libre. De plus, elle possède autant d'éléments que la dimension de $\mathbb{K}^n$, il s'agit donc d'une base.

Série 6, ex. 5

Commençons par montrer le lemme suivant :

Lemma 1. *Soit $\mathcal{F} = \{P_0, \ldots, P_n\} \subset V_n$ une famille de polynômes tels que, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, P_i est de degré i. Alors, $\mathcal{F}$ est une base de V_n.*

La famille $\mathcal{F}$ contient autant d'élément que la dimension de V_n, il suffit donc de montrer que cette famille est libre. Pour cela, on considère la base usuelle de V_n, *i.e.* $\{1, X, \cdots, X^n\}$. Dans cette base, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, P_i est de la forme

$$(a_1^i, a_2^i, \cdots, a_{i-1}^i, a_i^i, 0, \cdots, 0)$$

avec $a_1^i, \ldots, a_{i-1}^i \in \mathbb{R}$ et $a_i^i \in \mathbb{R}^*$. En les agençant dans l'ordre comme colonnes d'une matrice, on obtient donc une matrice triangulaire supérieure dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls. D'après l'exercice 5 de la série 5, cette matrice est inversible, ce qui signifie que la famille $\mathcal{F}$ est libre, donc qu'elle forme une base.

On vérifie facilement que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, les polynômes P_k et H_k sont de degré k. Le lemme s'applique et les polynômes de Legendre, d'une part, et d'Hermite, d'autre part, forment donc des bases de V_n.