Université de Genève
Section de Mathématiques

Algèbre I
Corrigé 2.

Série 7, ex. 3
Toutes les affirmations sont vraies sauf la dernière. En effet, pour que deux espaces soient en somme directe, il faut que leur intersection soit réduite à l'élément nul, or, dans ce cas, on a $U_{1,2} \cap U_{2,3} = U_2 \neq \{0\}$.

Série 7, ex. 4
Le rang d'une matrice correspond à la dimension de son image, ce qui est égal à la dimension maximale d'une sous-matrice extraite inversible.

Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont inversibles. Leurs rangs sont donc, respectivement, égaux à 2 et à 3.

Par contre, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, elle, ne l'est pas. Mais chacun de ses coefficients est une matrice carrée de taille 1 inversible. Son rang est donc 1.

Concernant $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, on peut extraire la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ qui est inversible. Cela donne un rang égal à 2.

Attention, pour qu'une matrice soit de rang au moins k, il suffit qu'elle possède **une** matrice extraite inversible de taille k. Dans le cas précédent, la matrice est bien de rang 2, même si la matrice extraite $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ de taille 2 n'est pas inversible.

Série 7, ex. 5
Montrons que la famille est libre. Pour cela, on considère $\sum_{i=-2}^{2} \alpha_i f_i = 0$ une relation linéaire avec $\alpha_{-2}, \ldots, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. On évalue maintenant cette égalité en les entiers de -2 à 2. Puisque, pour tout $i \in [\![-2, 2]\!]$, seul f_i n'est pas nul en i et qu'il y prend la valeur 1, cela donne $\alpha_i = 0$. La famille est donc libre. Or elle possède autant d'éléments que la dimension de V_4, elle en forme donc une base.

Série 8, ex. 1
La permutation 132 envoie 1 sur 1, 2 sur 3 et 3 sur 2. Elle échange donc 2 et 3 et correspond de fait à la transposition (23). Elle s'écrit donc comme produit d'une seule transposition et est son propre inverse. On a donc $(132)^{-1} = 132$ et $\mathrm{sign}(132) = -1$.

De même, on a $321 = (13)$ et donc $(321)^{-1} = 321$ et $\mathrm{sign}(321) = -1$.

D'après ce qui précéde, $132 \cdot 321 = (23) \cdot (13)$ s'écrit comme produit de deux transpositions. On a donc $\mathrm{sign}(132 \cdot 321) = (-1)^2 = 1$. De plus, on a[1]

$$1 \xrightarrow{321} 3 \xrightarrow{132} 2, \qquad 2 \xrightarrow{321} 2 \xrightarrow{132} 3, \qquad 3 \xrightarrow{321} 1 \xrightarrow{132} 1.$$

[1] à l'image de la composition de fonctions, un produit de permutations se lit toujours de la droite vers la gauche

Au final $132 \cdot 321 = 231$.

On se place désormais dans le groupe des permutations de 4 éléments. On a alors $2143 = (12) \cdot (34)$ donc $(2143)^{-1} = 2143$ et $\mathrm{sign}(2143) = 1$.

De même, $3214 = (13)$ et donc $(3214)^{-1} = 3214$ ainsi que $\mathrm{sign}(3214) = -1$.

D'après sa définition, il est clair que la signature d'une permutation est multiplicative *i.e.* pour toutes permutations σ et τ, on a $\mathrm{sign}(\tau \cdot \sigma) = \mathrm{sign}(\tau).\mathrm{sign}(\sigma)$. De fait, $\mathrm{sign}(2143 \cdot 3214) = -1$. Enfin, on a

$$1 \xrightarrow{3214} 3 \xrightarrow{2143} 4 \qquad 2 \xrightarrow{3214} 2 \xrightarrow{2143} 1 \qquad 3 \xrightarrow{3214} 1 \xrightarrow{2143} 2 \qquad 4 \xrightarrow{3214} 4 \xrightarrow{2143} 3,$$

et donc $2143 \cdot 3214 = 4123$.

Série 8, ex. 2

On a

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ -3 & 0 & -8 \end{vmatrix} && \scriptstyle (L_3 - 2L_2 \to L_3) \\
&= 2. \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -8 \end{vmatrix} && \scriptstyle (\text{dév. par rapport à } C_2) \\
&= -42;
\end{aligned}$$

ainsi que

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} && \scriptstyle (C_1 - C_2 - C_3 \to C_1) \\
&= -(-2). \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} && \scriptstyle (\text{dév. par rapport à } L_2) \\
&= -14;
\end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} && \scriptstyle (C_1 \leftrightarrow C_2, C_3 \leftrightarrow C_4) \\
&= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} && \scriptstyle (L_2 \leftrightarrow L_3) \\
&= -30.
\end{aligned}$$

Série 8, ex. 3

En factorisant 3 dans la seconde colonne on obtient

$$\begin{vmatrix} 97 & 81 & 101 \\ 1193 & 1200 & 1999 \\ 2003 & 15 & 2017 \end{vmatrix} = 3. \begin{vmatrix} 97 & 27 & 101 \\ 1193 & 400 & 1999 \\ 2003 & 5 & 2017 \end{vmatrix}$$

qui est bien divisible par 3 puisque le déterminant d'une matrice à coeeficients entiers est un entier.

Série 8, ex. 4

a) On peut calculer itérativement les puissances de σ et observer que $k = 6$, mais de façon plus générale, on peut aussi observer que par σ, 1 et 2 sont d'ordre 2, *i.e.* il faut leur appliquer deux fois σ avant de retomber sur eux-mêmes tandis que 3, 4 et 5 sont d'ordre 3. Pour que σ^k fixe tout le monde, il faut donc que k soit un multiple de 2 et de 3, or le plus petit multiple commun de 2 et de 3 est 6.

b) Soit τ un élément de S_5 qui commute avec σ, *i.e.* qui vérifie $\sigma\tau = \tau\sigma$. Pour $i = 1$ ou 2, on a $\sigma^2(i) = i$ et donc $\tau(i) = \tau\sigma^2(i) = \sigma\tau\sigma(i) = \sigma^2\tau(i) = \sigma^2\big(\tau(i)\big)$. Autrement dit, $\tau(i)$ est laissé fixe par σ^2. De même, pour $j = 3$, 4 ou 5, $\tau(j)$ est laissé fixe par σ^3.

D'après les remarques faites dans la question *a*), on a donc $\tau(1), \tau(2) \in \{1, 2\}$ et $\tau(3), \tau(4), \tau(5) \in \{4, 5, 6\}$. Cela ne laisse que 12 possibilités pour τ. En les essayant toutes, on obtient qu'une permutation commute avec σ si et seulement si elle fait partie de l'ensemble

$$\{12345, 12453, 12534, 21345, 21453, 21534\}.$$

Série 8, ex. 6

Nous avons déjà montré dans l'exercice 4 de la série 5 que le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure. Il suffit donc de montrer que l'inverse d'une matrice triangulaire supérieure inversible est encore triangulaire supérieure. Pour ce faire, il existe de nombreuses méthodes mais la plus simple est encore d'utiliser la transposée de la comatrice. En effet, on sait que pour toute matrice A inversible, on a $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}{}^t\mathrm{Com}(A)$ avec $\big(\mathrm{Com}(A)\big)_{ij} = (-1)^{i+j}|A^{ij}|$ où A^{ij} est la matrice obtenue à partir de A en enlevant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne.

Il suffit donc de montrer que si T est triangulaire supérieure, alors $|T^{ij}| = 0$ dès que $j > i$. Mais sous cette condition, on remarque vite que T^{ij} est encore triangulaire supérieure mais avec des zéros sur la diagonale entre les colonnes i et $j - 1$. Puisque, dans ce cas, le déterminant est égal au produit des coefficients diagonaux, il est bien nul.

Série 8, ex. 7

On a

$$\Delta_n(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} & 0 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} - x_1 x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} - x_1 x_n^{n-2} \end{vmatrix} \qquad {\scriptstyle (C_n - x_1.C_{n-1} \to C_n)}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1 x_2 & \cdots & x_2^{n-2} - x_1 x_2^{n-3} & x_2^{n-1} - x_1 x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n - x_1 & x_n^2 - x_1 x_n & \cdots & x_n^{n-2} - x_1 x_n^{n-3} & x_n^{n-1} - x_1 x_n^{n-2} \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} {\scriptstyle (C_{n-1} - x_1.C_{n-2} \to C_{n-1})} \\ \vdots \\ {\scriptstyle (C_2 - x_1.C_1 \to C_2)} \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1 x_2 & \cdots & x_2^{n-2} - x_1 x_2^{n-3} & x_2^{n-1} - x_1 x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_n - x_1 & x_n^2 - x_1 x_n & \cdots & x_n^{n-2} - x_1 x_n^{n-3} & x_n^{n-1} - x_1 x_n^{n-2} \end{vmatrix} \quad \text{(dév. par rapport à } L_1\text{)}$$

$$= (x_2 - x_1). \begin{vmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-3} & x_2^{n-2} \\ x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1 x_3 & \cdots & x_3^{n-2} - x_1 x_3^{n-3} & x_3^{n-1} - x_1 x_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_n - x_1 & x_n^2 - x_1 x_n & \cdots & x_n^{n-2} - x_1 x_n^{n-3} & x_n^{n-1} - x_1 x_n^{n-2} \end{vmatrix} \quad \text{(fact. } L_1 \text{ par } x_2 - x_1\text{)}$$

$$= (x_2 - x_1) \cdots (x_n - x_1). \begin{vmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-3} & x_2^{n-2} \\ 1 & x_3 & \cdots & x_3^{n-3} & x_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-3} & x_n^{n-2} \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \text{(fact. } L_2 \text{ par } x_3 - x_1\text{)} \\ \vdots \\ \text{(fact. } L_{n-1} \text{ par } x_n - x_1\text{)} \end{matrix}$$

$$= \left(\prod_{i=2}^{n} (x_i - x_1) \right) . \Delta_{n-1}(x_2, \ldots, x_n).$$

On peut alors montrer par récurrence sur $n \geq 2$ que[2]

$$\Delta_n(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

En effet, le cas $n = 2$ donne clairement $\begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$ et la formule précédente permet de passer du cas $n - 1$ au cas n.

Série 9, ex. 4

Pour calculer le déterminant de A, on développe selon la première ligne. On obtient alors $|A| = (-1)^{n+1} c_1 . \det(\mathbb{1}_n) = (-1)^{n-1} c_1$.

On note maintenant $C_n(c_1, \ldots, c_n)$ la matrice

$$A + x.\mathbb{1}_n = \begin{pmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & c_1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x & c_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & c_n + x \end{pmatrix}.$$

Quelques calculs pour les petites valeurs de n poussent à croire que

$$\det \big(C_n(c_1, \ldots, c_n) \big) = x^n + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} c_i x^{i-1}.$$

Montrons cela par récurrence sur $n \geq 2$.[3]

Pour $n = 2$, le résultat est clairement vérifié.

[2] avec la convention qu'un produit vide est égal à 1, la formule est même vraie pour $n = 1$

[3] le résultat est également vrai pour $C_1(c) = (c + x)$, correspondant à un cas atrophié de la description donnée de A

Supposons le résultat vrai pour n. On a alors

$$|C_{n+1}(c_1,\ldots,c_{n+1})| = \begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & c_1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x & c_n \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & c_{n+1}+x \end{vmatrix}$$

$$= x.\begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & c_2 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x & c_n \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & c_{n+1}+x \end{vmatrix} + (-1)^{n+1}c_1 \begin{vmatrix} 1 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & x \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{(dév. par rapport à } L_1\text{)}$$

$$= x.|C_n(c_2,\ldots,c_{n+1})| + (-1)^{n-1}c_1$$

$$= x\left(x^n + \sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}c_{i+1}x^{i-1}\right) + (-1)^{n-1}c_1 \quad \text{(par hyp. de réc.)}$$

$$= x^{n+1} + \left(\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}c_{i+1}x^{i}\right) + (-1)^{n-1}c_1$$

$$= x^{n+1} + \left(\sum_{j=2}^{n+1}(-1)^{n+1-j}c_j x^{j-1}\right) + (-1)^{n-1}c_1 \quad \text{(chgt d'ind. } j{=}i{+}1\text{)}$$

$$= x^{n+1} + \sum_{j=1}^{n+1}(-1)^{n+1-j}c_j x^{j-1}.$$

Le résultat est donc vrai pour $n+1$. D'après le principe de raisonnement par récurrence, la formule conjecturée est donc toujours vraie.

Remarque : Nous venons de montrer qu'en faisant varier les coefficients $c_1,\ldots,c_n$, n'importe quel polynôme unitaire peut être obtenu comme polynôme caractéristique d'une matrice.