Université de Genève
Section de Mathématiques

Algèbre I
Corrigé 3.

Série 11, ex. 5

a) On a $A^2 = \big(\frac{1}{2}(I_n - B)\big)^2 = \frac{1}{4}(I_n - B - B + B^2) = \frac{1}{4}(2I_n - 2B) = \frac{1}{2}(I_n - B) = A$.

b) Soit $x \in \mathrm{Ker}(A)$. On a alors $Ax = \frac{1}{2}(I_n - B)x = 0$ *i.e.* $I_n x - Bx = 0$ ou encore $Bx = x$.

Soit $x \in \mathrm{Im}(A)$. D'après l'exercice 4.a) de la série 11, on a alors $x \in \mathrm{Ker}(I_n - A)$ et donc $\big(I_n - \frac{1}{2}(I_n - B)\big)x = \frac{1}{2}(I_n + B)x = 0$, ce qui donne $Bx = -x$.

Série 11, ex. 6

a) On a $(I_n + a)(I_n - a) = I_n - a + a - a^2 = I_n$ et de même $(I_n - a)(I_n + a) = I_n$, la matrice $I_n + a$ est donc inversible avec $(I_n + a)^{-1} = (I_n - a)$.

Puisque a et I_n commutent, on a, d'après la formule du binôme, et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$(I_n + a)^k = \sum_{i=0}^{k} \begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix} I_n^{k-i} a^i = I_n + \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} a$$

puisque $a^i = 0$ pour tout $i \geq 2$. Or $\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} = k$ et donc $(I_n + a)^k = I_n + ka$.

Par multiplicativité du déterminant, on a $\det\big((I_n + a)^k\big) = \big(\det(I_n + a)\big)^k$. Mais d'après ce qui précède, on a aussi $\det\big((I_n + a)^k\big) = \det(I_n + ka)$. Or, que ce soit en développant récursivement selon des lignes ou bien en utilisant la définition sommatoire du déterminant, il est clair que $\det(I_n + ka)$ est un polynôme en k [1]. Mais que ce soit dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$, les seuls cas ou les applications de la forme $(k \mapsto \alpha^k)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sont des polynômes correspondent aux cas $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$. Donc $\det(I_n + a) = 0$ ou 1. Ona cependant vu que $I_n + a$ est inversible, on en conclut que $\det(I_n + a) = 1$.

b),c) Puisque a et I_n commutent, on peut essayer de mimer la formule analytique $\frac{1}{x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^k x^k + \varepsilon(x^k)$ avec l'information supplémentaire que $a^k = 0$. On pose donc $b = 1 - a + a^2 - \cdots + (-1)^{k-1} a^{k-1}$. On a alors

$$\begin{aligned}(I_n + a)b &= \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i a^i + \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i a^{i+1} \\ &= I_n + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i a^i + \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} a^j\end{aligned}$$

[1] dont les coefficients dépendent des coefficients de a, maios ceux-ci sont fixés

en sortant le premier terme de la première somme et en posant $j = i+1$ dans la seconde. En sortant alors le dernier terme de la seconde somme, on abitient alors

$$\begin{aligned}(I_n + a)b &= I_n + \sum_{i=1}^{k-1} \left((-1)^i a^i + (-1)^{i-1} a^i\right) + a^k \\ &= I_n.\end{aligned}$$

De même, on a $b(I_n + a) = I_n$. La matrice $I_n + a$ est donc inversible d'inverse $\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i a^i$.

Série 12, ex. 3

La matrice A, qui est de taille n, possèdent n valeurs propres distinctes. Puisque son polynôme caractéristique est de degré n, c'est donc que chaque valeur propre est de multiplicité 1. Or tout espace propre associé à un valeur propre est au moins de dimension 1. Pour toute valeur propre de A, il y a donc égalité entre sa multiplicité et la dimension de l'espace propre associé. La matrice A est donc diagonalisable *i.e.* il existe une matrice g de taille n inversible telle que

$$A = g^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} g.$$

On a alors

$$\begin{aligned} A^2 &= g^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} g g^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} g \\ &= g^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} g \\ &= g^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^2 \end{pmatrix} g \end{aligned}$$

Or, pour toute matrice M de taille n, on a

$$|g^{-1}Mg - I_n| = |g^{-1}Mg - g^{-1}g| = |g^{-1}||M - I_n||g| = |M - I_n||g|^{-1}|g| = |M - I_n|.$$

Les valeurs propres de A^2 sont donc les même que celles de $\begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^2 \end{pmatrix}$ *i.e.* $\{\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2\}$.

De même et par linéarité, on a

$$
\begin{aligned}
A^3 - A + 3I_n &= g^{-1}\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}^3 - \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) g \\
&= g^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1^3 - \lambda_1 + 3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^3 - \lambda_1 + 3 \end{pmatrix} g,
\end{aligned}
$$

et les valeurs propres de $A^3 - A + 3I_n$ sont les $\lambda_i^3 - \lambda_i + 3$ pour $i \in [\![1, n]\!]$.

Enfin, si A est inversible, c'est que toutes ses valeurs propres sont non nulles et on a

$$
A^{-1} = \left(g^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} g\right)^{-1} = g^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix} g.
$$

Les valeurs propres de A^{-1} sont donc les inverses des λ_i pour $i \in [\![1, n]\!]$.

Série 12, ex. 5

a) On a $p_1(\lambda) = |-\lambda| = -\lambda$ et $p_2(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1$.

b) Partons de $p_n(\lambda)$ et développons selon la première ligne. On obtient

$$
p_n(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda.p_{n-1}(\lambda) - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}.
$$

En redéveloppant selon la première colonne, on obtient $p_n(\lambda) = -\lambda.p_{n-1}(\lambda) - p_{n-2}(\lambda)$.

c) D'après la formule ci-dessus, on a

$$
p_3(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 - 1) - (-\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda,
$$

ainsi que

$$
p_4(\lambda) = -\lambda(-\lambda^3 + 2\lambda) - (\lambda^2 - 1) = \lambda^4 - 3\lambda^2 + 1.
$$

Série 13, ex. 4

a) On commence par essayer de diagonaliser A [2]. Les valeurs propres sont les racines de $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$, *i.e.* $\pm i$. Elles sont distinctes, A est donc diagonalisable. Pour chaque valeur propre, on cherche un vecteur propre associé *i.e.* une solution aux équations

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

et

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

. On trouve, par exemple et respectivement, $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$. On pose donc $g = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$, ce qui donne $g^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$ et $A = g \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} g^{-1}$. On a alors

$$\begin{aligned}
\exp(tA) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (tA)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} . g \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}^k g^{-1} \\
&= g \left(\sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{(it)^k}{k!} & 0 \\ 0 & \frac{(-it)^k}{k!} \end{pmatrix} \right) g^{-1} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} & \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} \\ \frac{-e^{it}+e^{-it}}{2i} & \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

b) On peut résoudre ce problème exactement de la même manière que le précédent. On peut aussi remarquer (et prouver par récurence) que $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a alors

$$\begin{aligned}
\exp(tA) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} . \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} & \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{t^k}{k!} \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k+1}}{k!} \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

[2] on peut aussi remarquer que les puissances de A sont cycliques d'ordre 4, la méthode proposée pour le b) peut donc, elle aussi, être appliquée

Série 13, ex. 5

D'après le théorème sur la forme de Jordan, il existe g une matrice inversible de taille n telle que $g^{-1}Ag$ soit une matrice diagonale par blocs

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & & & 0 \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & B_k \end{pmatrix}$$

où, pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, B_i est une matrice de taille n_i de la forme

$$B_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

avec $\lambda_i \in \mathbb{C}$ [3]. On a alors $p_A(\lambda) = p_B(\lambda) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda_i - \lambda)^{n_i}$ et $p_A(A) = g^{-1}p_A(B)g$. Or

$$\begin{aligned} p_A(B) &= \begin{pmatrix} p_A(B_1) & & & 0 \\ & p_A(B_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & p_A(B_k) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \prod_{i=1}^{k} (\lambda_i . I_{n_1} - B_1)^{n_i} & & & 0 \\ & \prod_{i=1}^{k} (\lambda_i . I_{n_2} - B_2)^{n_i} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \prod_{i=1}^{k} (\lambda_i . I_{n_k} - B_k)^{n_i} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mais pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, on a

$$(\lambda_i . I_{n_i} - B_i)^{n_i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}^{n_i} = 0.$$

Dans chaque bloc, un des terme au moins est donc nul. De fait, chaque produit est nul et on obtient que $p_A(B) = 0$, ce qui prouve bien le théorème de Cayley-Hamilton, *i.e.* que $p_A(A) = 0$.

[3] il se peut que plusieurs des λ_i soient égaux