Université de Genève
Section de Mathématiques
A. Alekseev

Algèbre I
Test 1, Corrigé.

1. Il s'agit d'une matrice triangulaire, son déterminant est donc égal au produit de ses coefficients diagonaux, *i.e.* à $1 \neq 0$. Elle est donc inversible. Appliquons la méthode d'inversion par manipulation des lignes[1] :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1+2.L_2 \to L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow L_1-11.L_3 \to L_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 2 & -11 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xleftarrow{L_2-4.L_3 \to L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 2 & -11 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice inverse de $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est donc $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -11 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. On a $\det(A) = 3.7 - 5.4 = 1 \neq 0$, la matrice A est donc une matrice inversible de taille 2×2, elle correspond donc bien à un changement de base dans $\mathbb{R}^2$.

Appliquée à la base canonique, cela donne

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$$

comme nouvelle base.

Les coordonnées de x dans cette base sont données par

$$A^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

3. Commençons par rendre le système d'équations échelonné.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+2y+az-t &=& -b^2 \\ 3x+2y+3az+t &=& 2-b^2 \\ y+bt &=& b \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x+2y+az-t &=& -b^2 \\ -4y+4t &=& 2+2b^2 \\ y+bt &=& b \end{array} \right. \quad {\scriptstyle L_2-3.L-1 \to L_2}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x+2y+az-t &=& -b^2 \\ -2y+2t &=& 1+b^2 \\ 2(1+b)t &=& (1+b)^2 \end{array} \right. \quad \begin{array}{r} \\ {\scriptstyle \frac{1}{2}.L_2 \to L_2} \\ {\scriptstyle 2.l_3+\frac{1}{2}.L_2 \to L_3} \end{array}$$

[1] appelée également par décomposition en matrices élémentaires

Il faut maintenant distinguer deux cas :

$b \neq -1$: la variable z peut être utilisé comme paramètre libre, les trois autres variables sont alors déterminées ;

$b = -1$: les variables z et t peuvent être utilisées comme paramètres libres, les deux autres variables sont alors déterminées.

En résumé, si $b = -1$, il y a une famille à deux paramètres libres de solutions, sinon, une famille à un paramètre libre.