Algèbre I — printemps 2008/2009

EXAMEN ÉCRIT, 4 JUIN 2009

1. Trouver le plus petit entier positif n tel que

$$\begin{cases} n \equiv 8 & \mod 11, \\ n \equiv 6 & \mod 61, \\ n \equiv 5 & \mod 101. \end{cases}$$

2. Trouver le pgcd de 2265 et 1048 à l'aide de l'algorithme d'Euclide. Ecrire une relation de Bézout.

3. L'anneau $\mathbb{Z}/200\mathbb{Z}$ est-il isomorphe à

   (a) $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/50\mathbb{Z}$;

   (b) $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$;

   (c) $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$;

   (d) $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$?

4. (a) Quel est le reste de la division de $7^{10^{11}}$ par 10^{10} ?

   (b) Quel est le reste de la division de 53^{50} par 72 ?

5. (a) Dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}[x]$, calculer les polynômes $(x-3)^2$, $(x+3)^2$, $(x+3)(x-3)$.

   (b) Dans $\mathbb{F}_{11}[x]$, trouver le générateur unitaire de l'idéal

$$(x+2,\ x^2-2x+3).$$

   Même question dans $\mathbb{R}[x]$.

   (c) Calculer le pgcd unitaire de x^2+1 et $2x^3-11x^2+2x-11$ dans $\mathbb{R}[x]$.

   (d) Quel est le nombre d'éléments de l'anneau $A = \mathbb{F}_3[x]/(x^2+1)$? Combien d'éléments inversibles y a-t-il ? Quelle est la caractéristique de A ?

6. Calculer

   (a) $14\mathbb{Z} + 42\mathbb{Z} + 98\mathbb{Z}$;

   (b) $4\mathbb{Z} \cdot 6\mathbb{Z} \cdot 8\mathbb{Z}$.

7. Soit A un anneau et I, J deux idéaux dans A. L'intersection $I \cap J$ est-elle forcément un idéal ? La réunion $I \cup J$ est-elle forcément un idéal ? Justifier les réponses par une preuve ou par un contre-exemple dans $\mathbb{Z}$.

8. Trouver le générateur $d \in \mathbb{N}$ de l'idéal de $\mathbb{Z}$ contenant les nombres de la forme $39x - 6y + 54z + 102w$ avec $x, y, z, w \in \mathbb{Z}$.

9. L'ensemble $\{a + b\sqrt{11} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ est-il un sous-anneau de $\mathbb{C}$? Justifier votre réponse.

10. Pour $n \in \mathbb{N}$,

    (a) montrer que $2^{2n+1} + 1$ est divisible par 3 ;

    (b) calculer $n^3 \pmod 9$.